

« پیشگفتار مؤلف »

نام « آنالیز حقیقی » تا حدودی یک خطای تاریخی است. در بدو امر برای نظریه توابع یک متغیره حقیقی به کار می‌رفت. به تدریج موضوعات متعددی از عالم مجرد و کلی‌تری را در بر گرفت که سنگ بنای آنالیز نوین را تشکیل می‌دهند. موضوع کتاب حاضر همین نظریه‌های کلی و کاربردهای آنها است و در وهله اول، به عنوان کتابی برای درس آنالیز دوره کارشناسی ارشد در نظر گرفته شده است. فصول ۱ تا ۷ به موارد زیر اختصاص یافته‌اند:

مطالب بنیادی نظریه اندازه و انتگرال، توپولوژی نقطه مجموعه ای و آنالیز تابعی که بخش عمده برنامه درسی ریاضی دوره کارشناسی ارشد است، به اضافه اندکی موضوعات مرتبط اما نا متعارف که تصور می‌کنم هر پژوهشگری باید با آنها آشنا باشد. چهار فصل آخر شامل مباحث گوناگونی است که حکایت از برخی قسمت‌های دیگر آنالیز دارند و استفاده از مطالب قبلی را شرح می‌دهند. تصور می‌کنم این مطالب همگی جالب و مهم هستند، اما انتخاب هر یک از آنها به جای دیگری اساساً یک موضوع شخصی است و به علاقه شخص بستگی دارد. دانستن مطالب زیر برای خوانندگان این کتاب ضروری است:

(۱) نظریه کلاسیک توابع یک متغیره حقیقی بر هر چیزی مقدم است: حد و پیوستگی، مشتق و انتگرال (ریمان)، سری های نامتناهی، همگرایی یکنواخت، و مفهوم یک فضای متری.

(۲) حساب اعداد مختلط و خواص اساسی تابع نمایی

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

(۳) قدری مقدمات نظریه مجموعه‌ها.

(۴) مقداری جبر خطی - عملاً چیزی بیش از تعریف فضای برداری، نگاشت‌های خطی و دترمینان‌ها لازم نیست.

همه مطالب مورد نیاز ذکر شده در (۱) و (۲) را می‌توان در کتاب آنالیز ریاضی رودین، یا روش‌های آنالیز جونز و بارتل یا آنالیز حقیقی و ریشه‌های آن از اس. چی. کیرانتز یافت. در فصل صفر، خلاصه‌ای از احکام مطرح در نظریه مجموعه‌ها و فضاهای متری آمده است. خواننده برای شروع این کتاب باید بندهای ۰.۱ و ۰.۵ را مطالعه کند تا با نمادگذاری و اصطلاحات آشنا شود؛ بنابراین این از فصل صفر می‌توان به عنوان ملزومات یادکرد.

هر فصل به بخشی تحت عنوان به « یادداشت‌ها و مراجع » ختم می‌شود. این بخش‌ها تذکرات گوناگون، تأیید مآخذ، علامات و احکام ذکر نشده در متن، مراجع برای مطالعه بیشتر و یادداشت‌های تاریخی را در بر می‌گیرند. موارد اخیر نسبتاً اجمالی هستند، با این وجود، گویای فراهم بودن مآخذ مفصل‌تر هستند؛ این موارد عمدتاً چشم اندازی از چگونگی شکل‌گیری موضوعات از مبادی کلاسیک آنها پیش رو می‌گذارند. دریافت‌ها که خواندن برخی از مقالات قدیمی خوشایند و آموزنده است. امیدوارم انگیزه‌های برای خواندن مقالات قدیمی در شما ایجاد کرده باشم.

بخش قابل ملاحظه‌ای از این کتاب به تمرین‌ها اختصاص یافته است. بیشتر تمرین‌ها در قالب گزاره‌هایی آمده‌اند که باید اثبات شوند، و از بدیهی تا دشوار چیده شده‌اند، برای آن دسته از تمرین‌هایی که پیچیده‌تر هستند راهنمایی و مراحل میانی آورده‌ام. تمام خوانندگان باید آنها را به دقت بخوانند، گرچه فقط خوانندگان سخت‌کوش به خواندن همه آنها مبادرت خواهند ورزید. این تمرین‌ها معضلات گوناگونی را از پیش رو برمی‌دارند: تفصیل و تکمیل برهان‌ها، طرح مثال‌ها و مثال‌های نقض، کاربرد قضایا، و گسترش بیشتر ایده‌ها از جمله این موارد هستند. احتمالاً مدرسین برخی از تمرین‌ها را در کلاس حل خواهند کرد؛ برای «انعطاف هرچه بیشتر و مخلص کلام» به این اصل تأسی جسته‌ام که «در صورت تردید در هر چیز، آن را به عنوان یک تمرین واگذار کنم»، به ویژه این امر در مورد مثال‌ها مشهود است. تمرین‌ها را در انتهای هر بخش آورده‌ام، اما داخل هر فصل به طور متوالی شماره‌گذاری شده‌اند. در مراجعه به تمرین‌ها، «تمرین ۲۲» به معنی ۲۲مین تمرین در فصل جاری است. در غیر این صورت، بخش مورد نظر مشخص شده است.

مباحث این کتاب به گونه‌ای پیوند خورده‌اند که در ارائه آنها آزادی وجود دارد. فصول ۴ و ۵ ربطی به فصل‌های ۱ تا ۳ ندارند به جز در پارهای از مثال‌ها و تمرین‌ها، از سوی دیگر، چنانچه کسی بخواهد سریعاً به نظریه LP برسد، می‌تواند از بند‌های ۳.۲ تا ۵.۱ صرف نظر کرده و سپس به فصل (۶) برسد. فصول ۱۰ و ۱۱ از فصل‌های ۸ و ۹ مستقل هستند به‌جز اینکه ایده‌های بند ۸.۶ در فصل ۱۰ به کار رفته‌اند.

ویژگی‌های این ویرایش عبارتند از:

• مبحث انتگرال لبگ ۲۲ - بعدی مطرح گردیده و گسترده شده است (بند‌های ۲.۶ و ۲.۷).

• قضیه تیخونوف (بند ۴.۷) به کمک استدلال زیبایی که اخیراً توسط پائول چرنوف کشف شده است اثبات گردیده است.

• فصل آنالیز فوریه به دو فصل ۸ و ۹ تفکیک شده است. موضوع سری‌ها و انتگرال‌های فوریه (بند‌های ۸.۳ تا ۸.۵) مطرح گردیده و ویرایش

جدید قضیه جردن ... دیریکله برای همگرایی سری‌های

فوریه را نیز دربردارد. موضوع توزیع‌ها (بند‌های ۹.۱ و ۹.۲) از هر نظر بازنویسی شده است.

• بخشی در مورد خود تشابهی و بُعدهای هاسدورف (بند ۱۱.۳) به جای محاسبه منسوخ بعدهای هاسدورف مجموعه‌های کانتور که در بند ۱۰.۲

از ویرایش قدیم آمده بود افزوده شده است.

نویسنده یک کتاب، آن هم در مورد موضوعات پخته‌ای نظیر آنالیز حقیقی لزوماً باید مرهون پیشینیانش باشد. وقتی این کتاب را می‌نوشتیم کتاب‌های زیادی در اختیار داشتیم؛ تعداد آنها فراتر از این است که فهرستی از آنها بیاورم، اما اکثر آنها در کتابخانه‌ها یافت می‌شوند. صمیمانه از اساتید بزرگوارم سپاسگزار می‌کنم:

از شادروان لین لومیس به‌خاطر سخنرانی‌هایشان که اولین بار این موضوع را از ایشان آموختم، و از الیاس اشتاین، کسی که در شکل‌گیری دیدگاهم بسیار موثر بود. بالاخره از اشخاصی که مرا در نوشتن این کتاب یاری کردند بسیار متشکرم بالاخص استیون کراتز، کینت رز، و ویلیام فاریس که نظرات آنها و نیز غلط‌گیری چاپی و ویرایش نخست مرا در تدوین کتاب حاضر یاری کرد.

جرالد بی. فولند

سیاتل، واشنگتن

فهرست

فصل صفر ملزومات

- ۰.۱ زبان نظریه مجموعه‌ها
- ۰.۲ ترتیب‌ها
- ۰.۳ عدد اصلی
- ۰.۴ مطالب اضافه در مورد مجموعه‌های خوشترتیب
- ۰.۵ دستگاه اعداد حقیقی توسیع یافته
- ۰.۶ فضاهاى مترى
- ۰.۷ یادداشت‌ها و مراجع

فصل اول اندازه‌ها

- ۱.۱ مقدمه
- ۱.۲ σ -جبرها
- ۱.۳ اندازه‌ها
- ۱.۴ اندازه‌های خارجی
- ۱.۵ اندازه‌های برل روی خط حقیقی
- ۱.۶ یادداشت‌ها و مراجع

فصل دوم انتگرال گیری

- ۲.۱ توابع اندازه‌پذیر
- ۲.۲ انتگرال گیری از توابع نامنفی
- ۲.۳ انتگرال گیری از توابع مختلط
- ۲.۴ انواع همگرایی
- ۲.۵ اندازه‌های حاصلضربی
- ۲.۶ انتگرال لبگ n -بعدی
- ۲.۷ انتگرال‌گیری در مختصات قطبی
- ۲.۸ یادداشت‌ها و مراجع

فصل سوم اندازه‌های علامت‌دار و مشتق‌گیری

- ۳.۱ اندازه‌های علامت‌دار

۱۱۴
۱۲۰
۱۲۳
۱۳۰
۱۴۲

قضیه لیگ - رادون - نیکودیوم	۳.۲
اندازه‌های مختلط	۳.۳
مشتق‌گیری روی فضاهای اقلیدسی	۳.۴
توابع با تغییر کراندار	۳.۵
یادداشت‌ها و مراجع	۳.۶

فصل چهارم توپولوژی نقطه مجموعه

۱۴۵
۱۵۱
۱۶۱
۱۶۵
۱۷۰
۱۷۲
۱۸۱
۱۸۷
۱۹۲

فضاهای توپولوژیک	۴.۱
نگاشت‌های پیوسته	۴.۲
تورها	۴.۳
فضاهای فشرده	۴.۴
فضاهای هاسدورف موضعاً فشرده	۴.۵
فضای فشردگی	۴.۶
قضیه استون - وایرستراس	۴.۷
نشاندن در مکعب	۴.۸
یادداشت‌ها و مراجع	۴.۹

فصل پنجم مقدمات آنالیز تابعی

۱۹۵
۲۰۲
۲۰۸
۲۱۵
۲۲۳
۲۳۲

فضاهای برداری نرم‌دار	۵.۱
تابع‌های خطی	۵.۲
قضیه کاتگوری بئر و نتایج آن	۵.۳
فضاهای برداری توپولوژیک	۵.۴
فضاهای هیلبرت	۵.۵
یادداشت‌ها و مراجع	۵.۶

فصل ششم فضاهای L^p

۲۳۵
۲۴۳
۲۵۰
۲۵۵
۲۵۸
۲۶۸
۲۷۳
۲۸۱
۲۸۹
۲۹۷

نظریه بنیادی فضاهای L^p	۶.۱
دوگان L^p	۶.۲
چند نابرابری سودمند	۶.۳
توابع توزیع و L^p ضعیف	۶.۴
درون‌یابی فضاهای L^p	۶.۵
یادداشت‌ها و مراجع	۶.۶

کتابنامه

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
فهرست راهنما

فصل صفر سرآغاز

هدف از این فصل مقدماتی، تثبیت نمادگذاری و اصطلاحات پیه کار رفته در خلال کتاب و ارائه احکام متعددی از نظریه مجموعه‌ها و آنالیز است که بعداً لازم خواهند شد. نامگذاری‌های این فصل مدبرانه و شسته رفته هستند، زیرا این فصل علاوه بر یک شرح منظم، به عنوان یک مرجع به کار برده می‌شود.

۱.۰ زبان نظریه مجموعه‌ها

فرض بر این است که خواننده با مباحث بنیادی نظریه مجموعه‌ها آشنا است؛ شرح زیرین در اصل به منظور تثبیت اصطلاحات است.

دستگاه‌های اعداد. نمادگذاری مورد استفاده در این کتاب برای دستگاه‌های بنیادی اعداد به صورت زیر است:

$$\mathbb{N} = \text{مجموعه اعداد صحیح مثبت (شامل صفر نیست)}$$

$$\mathbb{Z} = \text{مجموعه اعداد صحیح}$$

$$\mathbb{Q} = \text{مجموعه اعداد گویا}$$

$$\mathbb{R} = \text{مجموعه اعداد حقیقی}$$

$$\mathbb{C} = \text{مجموعه اعداد مختلط}$$

منطق. استفاده از علائم ویژه منطق ریاضی را کنار گذاشته و ترجیح می‌دهیم که از نمادهای متعارف انگلیسی استفاده کنیم. یکی از نکات مقدماتی منطق که اغلباً توسط دانشجویان کم اهمیت شمرده می‌شود این است که: اگر A و B دو حکم ریاضی و $A - B$ و $B - A$ نقیض‌های آنها باشند، آنگاه عبارت « A ایجاب می‌کند B را» به طور منطقی با عکس نقیض آن یعنی « $B - A$ ایجاب می‌کند $A - B$ را» هم ارز است. بنابراین می‌توان با فرض درستی $B - A$ و نتیجه گرفتن $A - B$ ، گزاره «اگر A ، آنگاه B » را اثبات کرد و بارها چنین خواهیم کرد. این با برهان خلف یکی نیست. برهان خلف شامل فرض A و $B - A$ و استخراج یک تناقض است.

مجموعه‌ها. همواره برای پرهیز از شبهه « مجموعه مجموعه‌ها » واژگان « خانواده » و « گردایه » مترادف « مجموعه » به کار خواهند رفت. مجموعه تهی با نماد \emptyset و خانواده همه زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای چون X با $\mathcal{P}(X)$ نشان داده می‌شود، یعنی،

$$\mathcal{P}(X) = \{E : E \subset X\}.$$

همه جا علامت C به معنی ضعیف تلقی می‌شود، یعنی، عبارت « $E \subset X$ » امکان $E = X$ را بلیغ نمی‌کند چنانچه \mathcal{E} خانواده‌ای از مجموعه‌ها باشد، می‌توانیم اجتماع و اشتراک اعضایش را تشکیل دهیم:

$$\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E = \{x : x \in E, E \in \mathcal{E}\},$$

$$\bigcap_{E \in \mathcal{E}} E = \{x : x \in E, E \in \mathcal{E}\}.$$

معمولاً در نظر گرفتن خانواده‌های اندیسدار از مجموعه‌ها کار با مجموعه‌ها را تسهیل می‌کند:

$$\mathcal{E} = \{E_\alpha : \alpha \in A\} = \{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

که در این حالت اجتماع و اشتراک با

$$\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \text{ و } \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha$$

نشان داده می‌شوند. چنانچه $\alpha \neq \beta$ ایجاب کند که $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset$ ، مجموعه‌های E_α مجزا نامیده می‌شوند. جملات « گردایه مجزایی از مجموعه‌ها » و « گردایه‌ای از مجموعه‌های مجزا » همانند « اجتماعی مجزا از مجموعه‌ها » و « اجتماعی از مجموعه‌های مجزا » هم معنی هستند.

هنگام در نظر گرفتن خانواده‌های اندیسگذاری شده با N ، نمادگذاری چنین خواهد بود:

$$\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ یا } \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

و نمادهای مشابهی برای اجتماع‌ها و اشتراک‌ها به کار برده می‌شوند. در این باره، گاهی اوقات مفاهیم جداعتی و حداسفل به کار می‌آیند:

$$\limsup E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \text{ و } \liminf E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} E_n.$$

خواننده می‌تواند درستی تساوی‌های زیر را بررسی کند:

$$\limsup E_n = \{x : x \in E_n \text{ ها، } n \text{ نامتناهی از } n \text{ ها}\},$$

$$\liminf E_n = \{x : x \in E_n \text{ ها به جز تعداد متناهی از آنها}\}.$$

هرگاه E و F مجموعه‌هایی دل خواه باشند، تفاضل آنها را با $E \setminus F$ نشان می‌دهیم:

$$E \setminus F = \{x : x \in E, x \notin F\}$$

تفاضل متقارن آنها را با $E \Delta F$ نشان می‌دهیم:

$$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

وقتی به وضوح معلوم شود که همه مجموعه‌های مورد نظر زیرمجموعه‌هایی از یک مجموعه ثابت مانند X هستند، متمم E^c از E (در X) را تعریف می‌کنیم:

$$E^c = X \setminus E.$$

$$\left(\bigcup_{\alpha \in A} E_{\alpha}\right)^c = \bigcap_{\alpha \in A} E_{\alpha}^c, \quad \left(\bigcap_{\alpha \in A} E_{\alpha}\right)^c = \bigcup_{\alpha \in A} E_{\alpha}^c.$$

اگر X و Y دو مجموعه باشند، حاصلضرب دکارتی $X \times Y$ مجموعه همه زوج‌های مرتب (x, y) است به طوری که $x \in X$ و $y \in Y$. یک رابطه از X به Y یک زیرمجموعه از $X \times Y$ است. (اگر $Y = X$ ، از یک رابطه روی X سخن می‌گوییم.) اگر R رابطه‌ای از X به Y باشد، گاهی اوقات xRy را به معنی $(x, y) \in R$ خواهیم نوشت. مهمترین نوع روابط عبارتند از:

• روابط هم‌ارزی. یک رابطه هم‌ارزی روی X رابطه‌ای چون R روی X است به طوری که

به ازای هر $x, x \in X$ xRx

xRy اگر و تنها اگر yRx

xRz هرگاه به ازای y, yRx و yRz .

رده هم‌ارزی عضوی چون $x, \{y \in X : xRy\}$ است. اجتماع مجزای همین رده‌های هم‌ارزی است.

• ترتیب‌ها. بند ۰.۲ را ببینید.

• نگاشت‌ها. نگاشتی چون $f: X \rightarrow Y$ رابطه‌ای مانند R از X به Y است با این خاصیت که به ازای هر $x \in X$ عضو یکتایی چون $y \in Y$ وجود داشته باشد به طوری که xRy که در این حالت می‌نویسیم $y = f(x)$. گاهی اوقات نگاشت‌ها را نگاره‌ها یا توابع نیز می‌نامیم. بیشتر نام اخیر را برای حالتی به کار می‌بریم که Y مجموعه C یا زیرمجموعه‌ای از آن باشد.

اگر $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ دو نگاشت باشند، ترکیب آنها را با $f \circ g$ نشان می‌دهیم:

$$g \circ f: X \rightarrow Z, \quad g \circ f(x) = g(f(x)).$$

اگر $D \subset X$ و $E \subset Y$ ، تصویر D و تصویر معکوس E تحت نگاشتی چون $f: X \rightarrow Y$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(D) = \{f(x) : x \in D\}, \quad f^{-1}(E) = \{x : f(x) \in E\}.$$

به آسانی دیده می‌شود که نگاشت $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ که با فرمول دوم تعریف شد با اجتماع‌ها، اشتراک‌ها و متمم‌ها جابه‌جا می‌شود، یعنی:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in A} E_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(E_{\alpha}), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in A} E_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha \in A} f^{-1}(E_{\alpha}),$$

$$f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c.$$

(نگاشت تصویر مستقیم $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ با اجتماع‌ها جابه‌جا می‌شود، اما در حالت کلی با اشتراک‌ها و متمم‌ها جابه‌جا نمی‌شود.)

اگر $f: X \rightarrow Y$ یک نگاشت باشد، X دامنه f و $f(X)$ برد f نامیده می‌شود. f یک به یک خوانده می‌شود هرگاه $f(x_1) = f(x_2)$ فقط وقتی برقرار باشد که $x_1 = x_2$ و پوشا نامیده می‌شود هرگاه $f(X) = Y$ و دوسویی است هرگاه

هم یک به یک و هم پوشا باشد. اگر f یک به یک باشد، آنگاه وارونی مانند $f^{-1} : Y \rightarrow X$ دارد به طوری که $f^{-1} \circ f$ و $f \circ f^{-1}$ به ترتیب نگاشت‌های همانی روی X و Y هستند. اگر $A \subset X$ ، تحدید f به A را با $f|_A$ نشان می‌دهیم، یعنی:

$$(f|_A) : A \rightarrow Y, (f|_A)(x) = f(x) \quad (x \in A)$$

یک دنباله در مجموعه‌ای چون X ، نگاشتی از \mathbb{N} به X است. عبارت دنباله متناهی را نیز به معنی نگاشتی از $\{1, \dots, n\}$ به X به کار می‌بریم که در آن $n \in \mathbb{N}$. چنانچه $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ یک دنباله باشد و $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ طوری باشد که اگر $n < m$ ، آنگاه $g(n) < g(m)$ ، ترکیب $f \circ g$ یک زیردنباله از f نامیده می‌شود. اغلب نادیده انگاشتن تمایز بین دنباله‌ها و بردهایشان که زیرمجموعه‌هایی اندیسگذاری شده با \mathbb{N} از X هستند کار را راحت می‌کند و چنین چیزی مرسوم است. بنابر این اگر $f(n) = x_n$ ، از دنباله $\{x_n\}_1^\infty$ سخن می‌گوییم؛ چه آن را به معنی نگاشتی از \mathbb{N} به X در نظر بگیریم چه زیرمجموعه‌ای از X ، از متن مشخص خواهد شد.

قبلاً حاصلضرب دکارتی دو مجموعه را تعریف کردیم. به طور مشابه حاصلضرب دکارتی n مجموعه را می‌توان برحسب n تایی‌های مرتب تعریف کرد. اما این تعریف در مورد خانواده‌های نامتناهی از مجموعه‌ها ناموزون می‌شود، لذا به جای آن تعریف زیر به کار می‌رود:

اگر $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ خانواده‌ای اندیس دار از مجموعه‌ها باشد، حاصلضرب دکارتی آنها، یعنی $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ مجموعه همه نگاشت‌هایی چون $f : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ است به طوری که به ازای هر $\alpha \in A$ ، $f(\alpha) \in X_\alpha$ (باید توجه شود و سپس سریعاً فراموش شود که وقتی $A = \{1, 2\}$ تعریف قبلی $X_1 \times X_2$ از دیدگاه نظریه مجموعه‌ها با تعریف جدید $\prod_1 X_i$ تفاوت دارد. در واقع، مقوله اخیر به نگاشت‌ها وابسته است که این نگاشت‌ها براساس تعریف قبل معرفی می‌شوند). اگر $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ و $\alpha \in A$ ، آمین تصویر یا نگاشت مؤلفه‌ای $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ را با $\pi_\alpha(f) = f(\alpha)$ تعریف می‌کنیم. به کرات به جای f و $f(\alpha)$ می‌نویسیم x و x_α . به مؤلفه α ام x می‌گوییم.

اگر مجموعه‌های X_α همگی برابر مجموعه ثابتی چون Y باشند، $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ را با Y^A نشان می‌دهیم:

$$Y^A = \prod_{\alpha \in A} Y$$

اگر $A = \{1, \dots, n\}$ با Y^n نشان داده می‌شود و می‌توان آن را با مجموعه همه n -تایی‌های مرتب از اعضای Y یکی گرفت.

۲. ترتیب‌ها

یک ترتیب جزئی روی مجموعه‌ای ناتهی مانند X رابطه‌ای مانند R روی X با خواص زیر است:

• اگر xRy و yRz ، آنگاه xRz ;

• اگر xRy و yRx ، آنگاه $x = y$;

• به ازای هر x ، xRx .

اگر R در خاصیت زیر نیز صدق کند، آنگاه R یک ترتیب خطی (یا کلی) نامیده می‌شود:

• اگر $x, y \in X$ ، آنگاه xRy یا yRx .

به عنوان مثال، اگر E یک مجموعه باشد، آنگاه $\mathcal{P}(E)$ با شمول جزئاً مرتب می شود و \mathbb{R} با ترتیب معمولی خود به طور خطی مرتب است. مثال اخیر را به عنوان الگو در نظر گرفته و همواره ترتیب های جزئی را با \leq نشان می دهیم و وقتی می نویسیم $x < y$ به این معناست که $x \leq y$ اما $x \neq y$. ملاحظه می کنیم که هر ترتیب جزئی روی X ، به طور طبیعی یک ترتیب جزئی روی هر زیر مجموعه ناتهی از X القا می کند. دو مجموعه مرتب جزئی X و Y ایزومورف ترتیبی نامیده می شوند هرگاه یک دو سویی مانند $f: X \rightarrow Y$ وجود داشته باشد به طوری که $x_1 \leq x_2$ اگر و تنها اگر $f(x_1) \leq f(x_2)$. اگر X با \leq مرتب جزئی شده باشد، یک عضو ماکسیمال (متناظراً مینیمال) از X عضوی چون $x \in X$ است به طوری که تنها عضو $y \in X$ که در $x \leq y$ (متناظراً در $x \geq y$) صدق می کند خود x باشد. ممکن است اعضای ماکسیمال و مینیمال وجود داشته باشند و ممکن است وجود نداشته باشند و لزوماً یکتا نیستند مگر اینکه ترتیب خطی باشد. اگر $E \subset X$ ، یک کران بالا (متناظراً پایین) برای E عضوی چون x است که به ازای هر $y \in E$ ، $y \leq x$ (متناظراً $x \leq y$)، یک کران بالا برای E لزوماً عضوی از E نیست و یک عضو ماکسیمال از E لزوماً یک کران بالا برای E نیست مگر اینکه E به طور خطی مرتب شده باشد. (خواننده بایستی مثال هایی را در ذهن خود پیوردد). اگر X به طور خطی با \leq مرتب شده باشد و هر زیرمجموعه ناتهی X یک عضو مینیمال (نه لزوماً یکتا داشته باشد، آنگاه گفته می شود که X با \leq جزئاً مرتب شده است، و به دلیل نارسایی نگارشی زبان \leq یک خوشترتیبی روی X نامیده می شود. به عنوان مثال، \mathbb{N} با ترتیب طبیعی خوشترتیب است. اکنون یک اصل بنیادی از نظریه مجموعه ها را مطرح کرده و برخی نتایج آن را استخراج می کنیم.

۱. اصل ماکسیمال هاسدورف. هر مجموعه مرتب زیرمجموعه مرتب خطی ماکسیمالی دارد. معنی دقیق اصل مذکور این است که اگر X با \leq جزئاً مرتب شده باشد، آنگاه مجموعه ای چون $E \subset X$ وجود دارد که با \leq به طور خطی مرتب می شود به طوری که هیچ زیرمجموعه ای از X که به طور سره شامل E است با \leq به طور خطی مرتب نمی شود.

۲. لم زورن. اگر X مجموعه ای جزئاً مرتب باشد و هر زیرمجموعه مرتب خطی X دارای یک کران بالا باشد، آنگاه X یک عضو ماکسیمال دارد.

به وضوح اصل ماکسیمال هاسدورف لم زورن را نتیجه می دهد: هر کران بالا برای یک زیرمجموعه مرتب خطی ماکسیمال X یک عضو ماکسیمال X است. ملاحظه این مطلب نیز مشکل نیست که لم زورن اصل ماکسیمال هاسدورف را ایجاب می کند. (لم زورن را برای گردایه زیرمجموعه های مرتب خطی X که با شمول جزئاً مرتب شده است به کار برید).

۳. اصل خوشترتیبی. هر مجموعه ناتهی مانند X را می توان خوشترتیب کرد.

برهان. فرض می کنیم \mathcal{W} گردایه زیرمجموعه های خوشترتیب X باشد و یک ترتیب جزئی به صورت زیر روی \mathcal{W} تعریف می کنیم. اگر \leq_1 و \leq_2 خوشترتیب هایی روی زیر مجموعه های E_1 و E_2 باشند، آنگاه \leq_1 در ترتیب جزئی از \leq_2 بیشتر است

هرگاه (الف) \leq_1, \leq_2 را توسعه دهد، یعنی $E_1 \subset E_2$ و $\leq_1 \leq \leq_2$ روی E_1 سازگار باشند و (ب) اگر $x \in E_1 \setminus E_2$ ، آنگاه به ازای هر $x, y \in E_1$ ، خواننده می تواند بررسی کند که مفروضات لم زورن محقق شده اند و لذا W یک عضو ماکسیمال دارد. این باید یک خوشترتیبی روی خود X باشد، زیرا اگر \leq یک خوشترتیبی روی زیر مجموعه ای سره مانند E از X باشد و $x_0 \in X \setminus E$ ، آنگاه \leq را با قید $x_0 \leq x$ برای هر $x \in E$ می توان به یک خوشترتیبی روی $E \cup \{x_0\}$ توسعه داد. ■

۴. اصل انتخاب. اگر $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ گردایه ای ناتهی از مجموعه های ناتهی باشد، آنگاه $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ناتهی است.

برهان. فرض می کنیم $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ یک خوشترتیبی روی X در نظر گرفته و به ازای $\alpha \in A$ ، $f(\alpha)$ را عضو مینیمال X_α می انگاریم. در این صورت $f \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. ■

۵. نتیجه. اگر $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ گردایه ای مجزا از مجموعه های ناتهی باشد، مجموعه ای مانند $Y \subset \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ وجود دارد به قسمی که به ازای هر $\alpha \in A$ ، $Y \cap X_\alpha$ دقیقاً شامل یک عضو است.

برهان. $Y = f(A)$ را در نظر می گیریم که در آن $f \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. ■

اصل انتخاب را از اصل ماکسیمال هاسدورف نتیجه گرفتیم؛ در واقع، می توان نشان داد که این دو از نظر منطقی هم ارز هستند.

۳. عدد اصلی

اگر X و Y مجموعه هایی ناتهی باشند، نمادهای $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ ، $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$ ، $\text{card}(X) \geq \text{card}(Y)$

را این گونه معنی می کنیم که تابعی چون $f: X \rightarrow Y$ وجود دارد که به ترتیب (از چپ به راست) یک به یک، دوسویی، یا پوشا است. همچنین

$\text{card}(X) < \text{card}(Y)$ ، $\text{card}(X) > \text{card}(Y)$

را به معنی وجود یک تابع یک به یک از X به Y که دوسویی نیست یا تابعی پوشا که دوسویی نیست تعریف می کنیم. روش های متعدد انجام چنین کاری وجود دارد، اما اینها به اهدافمان ارتباطی ندارند (به جز وقتی X متناهی است - توضیحات زیر را ببینید). این روابط را می توان با قید زیر به مجموعه تهی نیز تعمیم داد: به ازای هر $X \neq \emptyset$ ، $\text{card}(\emptyset) < \text{card}(X)$ ، $\text{card}(X) > \text{card}(\emptyset)$.

در باقیمانده این بخش برای پرهیز از استدلال در مورد \emptyset به طور ضمنی فرض می‌کنیم که همه مجموعه‌های مطرح شده ناتهی هستند. نخستین هدف، اثبات این مطلب است که روابط تعریف شده‌ی فوق با خواصی که از نمادگذاری برداشت می‌شود همخوانی دارند.

۰.۶ گزاره. $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ اگر و تنها اگر $\text{card}(Y) \geq \text{card}(X)$.

برهان. اگر $f: X \rightarrow Y$ یک به یک باشد، $x_0 \in X$ را برگزیده و $g: Y \rightarrow X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & y \in f(X), \\ x_0, & y \notin f(X). \end{cases}$$

در این صورت g پوشا است. به عکس، اگر $g: Y \rightarrow X$ پوشا باشد، مجموعه‌های $\{x\}^{-1}g^{-1}(\{x\})$ ($x \in X$) غیر تهی و مجزا هستند و لذا هر $f \in \prod_{x \in X} g^{-1}(\{x\})$ نگاشتی یک به یک از X به Y است. ■

۰.۷ گزاره. برای هر Y, X ، یا $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ یا $\text{card}(Y) \leq \text{card}(X)$.

برهان. مجموعه I متشکل از همه نگاشت‌های یک به یک از زیرمجموعه‌های X به Y را در نظر می‌گیریم. به آسانی قابل استفاده بودن لم زورن در اینجا ملاحظه می‌شود، لذا I عضو ماکسیمالی مانند f دارد که دامنه و بردش مجموعه‌هایی مثل A و B هستند. اگر $x_0 \in X \setminus A$ و $y_0 \in Y \setminus B$ ، آنگاه با قرار دادن $f(x_0) = y_0$ ، f را می‌توان به یک نگاشت یک به یک از $A \cup \{x_0\}$ به $Y \cup \{y_0\}$ توسعه داد و این ماکسیمال بودن f را نقض می‌کند. بنابراین یا $A = X$ که در این حالت $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ ، یا $B = Y$ که در این صورت f^{-1} یک نگاشت یک به یک از Y به X است و در نتیجه $\text{card}(Y) \leq \text{card}(X)$. ■

۰.۸ قضیه شرودر-برنشتاین. اگر $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ و $\text{card}(Y) \leq \text{card}(X)$ ، آنگاه $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$.

برهان. فرض کنیم $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow X$ دو نگاشت یک به یک باشند. نقطه‌ای چون $x \in X$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت اگر $x \in g(Y)$ ، $x \in Y$ را تشکیل می‌دهیم و اگر $x \in f(X)$ ، $g^{-1}(x)$ را تشکیل می‌دهیم و اگر $x \in g(Y) \setminus f(X)$ ، $g^{-1}(g^{-1}(x))$ را تشکیل می‌دهیم و الی آخر. یا این روال به طور نامعین ادامه می‌یابد، یا به عضوی از $X \setminus g(Y)$ ختم می‌شود (شاید به خود x ختم شود) یا به عضوی از $Y \setminus f(X)$ ختم می‌شود. در این سه حالت می‌گوییم x در X_∞ ، X_X ، یا X_Y است؛ بنابراین این اجتماع مجزای X_∞ ، X_X و X_Y است. به همین روش، Y اجتماع مجزای Y_∞ ، Y_X و Y_Y است. به وضوح f

مجموعه X_∞ را بروی Y_∞ و X_X را بروی Y_X می نگارد، در حالی که g مجموعه Y_Y را بروی X_Y می نگارد. بنابراین، اگر $h: X \rightarrow Y$ را به صورت

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X_\infty \cup X_X, \\ g^{-1}(x) & x \in X_Y \end{cases}$$

تعریف کنیم، آنگاه h یک دوسویی است. ■

۹. گزاره: به ازای هر مجموعه مانند X ، $\text{card}(X) < \text{card}(\mathcal{P}(X))$.

برهان. از یک سو، نگاشت $f(x) = \{x\}$ از X به $\mathcal{P}(X)$ یک به یک است. از سوی دیگر، اگر $g: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ یک نگاشت باشد، قرار می دهیم $Y = \{x \in X : x \notin g(x)\}$. در این صورت $Y \notin g(X)$ ، زیرا اگر به ازای عضوی چون $x_0 \in X$ ، $Y = g(x_0)$ ، آنگاه هر تلاش برای پاسخ به سؤال « آیا $x_0 \in Y$ ؟ » سریعاً با شکست مواجه می شود. بنابراین g نمی تواند پوشا باشد. ■

مجموعه ای چون X را شمارش پذیر (حداکثر شمارش پذیر) نامیم هرگاه $\text{card}(X) \leq \text{card}(\mathbb{N})$. به ویژه، همه مجموعه های نامتناهی، شمارش پذیر هستند و به همین خاطر بهتر است « $\text{card}(X)$ » را به عنوان تعداد اعضای واقع در X تعبیر کنیم:

$$\text{card}(X) = n \text{ اگر و تنها اگر } \text{card}(X) = \text{card}(\{1, \dots, n\})$$

اگر X شمارش پذیر اما نامتناهی باشد، می گوئیم X شمارش پذیر نامتناهی است.

۱۰. گزاره.

- الف) اگر X و Y شمارش پذیر باشند، $X \times Y$ نیز شمارش پذیر است؛
 ب) اگر A شمارش پذیر و به ازای هر $\alpha \in A$ ، X_α شمارش پذیر باشد، آنگاه $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ شمارش پذیر است؛
 ج) اگر X شمارش پذیر نامتناهی باشد، آنگاه $\text{card}(X) = \text{card}(\mathbb{N})$.

برهان. برای اثبات (الف) کافی است ثابت کنیم \mathbb{N}^2 شمارش پذیر است. اما می توان با فهرست کردن اعضا، یک دو سویی از \mathbb{N} به \mathbb{N}^2 به صورت زیر تعریف کرد:
 به ازای n که به طور متوالی، $2, 3, 4, \dots$ اختیار می کند، اعضای $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ را فهرست می کنیم به طوری که $j + k = n$ و j در حال صعود است؛ یعنی،

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), \dots$$

اما برای (ب)، به ازای هر $\alpha \in A$ ، نگاشتی پوشا مانند $f_\alpha : \mathbb{N} \rightarrow X_\alpha$ وجود داشته و در نتیجه نگاشت $f : \mathbb{N} \times A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ که با $f(n, \alpha) = f_\alpha(n)$ تعریف می شود پوشا است؛ بنابراین، حکم از (الف) نتیجه می شود. بالاخره، برای (ج) کافی است X را زیرمجموعه ای نامتناهی از \mathbb{N} در نظر بگیریم. فرض می کنیم $f(1)$ کوچکترین عضو X باشد. وجه طور استقرایی $f(n)$ را کوچکترین عضو $E \setminus \{f(1), \dots, f(n-1)\}$ تعریف می کنیم. در این صورت به آسانی دیده می شود که f یک دو سوئی از \mathbb{N} بروی X است. ■

۱۱. نتیجه. \mathbb{Z} و \mathbb{Q} شمارش پذیر هستند.

برهان. \mathbb{Z} اجتماع شمارش پذیر مجموعه های \mathbb{N} ، $\{-n : n \in \mathbb{N}\}$ و $\{0\}$ است و می توان یک نگاشت پوشا مانند $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ به صورت زیر تعریف کرد:

$$f(m, n) = \begin{cases} \frac{m}{n} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

بدین ترتیب برهان کامل می شود. ■

گوئیم مجموعه ای چون X دارای عدد اصلی پیوستاری است هرگاه $\text{card}(X) = \text{card}(\mathbb{R})$. حرف c را به عنوان مخففی برای $\text{card}(\mathbb{R})$ به کار خواهیم برد. $\text{card}(X) = c$ اگر و تنها اگر $\text{card}(X) = \text{card}(\mathbb{R})$.

۱۲. گزاره. $\text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = c$.

برهان. اگر $A \subset \mathbb{N}$ ، آنگاه $f(A) \in \mathbb{R}$ را چنین تعریف می کنیم:

$$f(A) = \begin{cases} \sum_{n \in A} 2^{-n} & \text{متمنهای } \mathbb{N} \setminus A \\ 1 + \sum_{n \in A} 2^{-n} & \text{متمنهای } \mathbb{N} \setminus A \end{cases}$$

(در هر دو حالت $f(A)$ عددی است که بسط اعشاری آن در مبنای ۲، $0/a_1a_2\dots$ یا $1/a_1a_2\dots$ است که در آن $a_n = 1$ هرگاه $n \in A$ و در غیر این صورت $a_n = 0$) در این صورت $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ یک به یک است. از سوی دیگر، $g : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$ را چنین تعریف می کنیم: $g(A) = \log(\sum_{n \in A} 2^{-n})$ هرگاه A از پایین کراندار باشد و در غیر این صورت $g(A) = 0$. در این صورت g پوشا است زیرا هر عدد حقیقی مثبت دارای یک بسط اعشاری در مبنای ۲ است. چون $\text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{Z})) = \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ، حکم از قضیه شرودر - برنشتاین نتیجه می شود. ■

۱۳. نتیجه. اگر $\text{card}(X) \geq c$ ، آنگاه X شمارش ناپذیر است.

برهان. گزاره ۹ را به کار برید. ■

عکس این نتیجه، فرضیه پیوستار نامیده می شود که اعتبار آن یکی از مسائل تصمیم ناپذیر مشهور نظریه مجموعه ها است؛ بند ۷ را ببینید.

۱۴. گزاره.

الف) اگر $\text{card}(X) \leq c$ و $\text{card}(Y) \leq c$ ، آنگاه $\text{card}(X \times Y) \leq c$.
ب) اگر $\text{card}(A) \leq c$ و به ازای هر $\alpha \in A$ ، $\text{card}(X_\alpha) \leq c$ ، آنگاه $\text{card}(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha) \leq c$.

برهان. برای (الف) کافی است $X = Y = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ را در نظر بگیریم. $\phi, \psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ را با $\phi(n) = 2n$ و $\psi(n) = 2n - 1$ تعریف می کنیم. در این صورت به آسانی معلوم می شود که نگاشت $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ که با $f(A, B) = \phi(A) \cup \psi(B)$ تعریف می شود دوسوی است. همانند برهان گزاره ۱۰، (ب) از (الف) نتیجه می شود. ■

۳. مطالب اضافه در مورد مجموعه های خوشترتیب

مطالب این بخش اختیاری است، این مطالب فقط در تعداد کمی از تمرین ها و برخی تذکرات اواخر فصل ها مورد استفاده قرار می گیرند.

فرض کنیم X یک مجموعه خوشترتیب باشد. اگر $A \subset X$ ناتهی باشد، A عضو مینیمالی دارد که کران پایین ماکسیمال یا اینفیمم آن است؛ این عضو را با $\inf A$ نشان می دهیم. اگر A از بالا کراندار باشد، یک کران بالای مینیمال یا سوپرمم نیز دارد که با $\sup(A)$ نشان داده می شود. اگر $x \in X$ ، قطعه اولیه I_x را چنین تعریف می کنیم:

$$I_x = \{y \in X : y < x\}.$$

اعضای I_x مقدم های x نامیده می شوند.

اصل استقرای ریاضی با خوشترتیب \mathbb{N} هم ارز است. این اصل را به صورت زیر می توان به مجموعه های خوشترتیب دل خواه توسیع داد:

۱۵. اصل استقرای ترامتناهی. فرض کنیم X یک مجموعه خوشترتیب باشد. اگر A زیرمجموعه ای از X باشد که از $I_x \subset A$ نتیجه شود که $x \in A$ ، آنگاه $A = X$.

برهان. اگر $X \neq A$ ، قرار می دهیم $x = \inf(X \setminus A)$. در این صورت $I_x \subset A$ اما $x \notin A$. ■

۱۶. گزاره. اگر X خوشترتیب باشد و $A \subset X$ ، آنگاه $\bigcup_{x \in A} I_x$ یا یک قطعه اولیه است یا خود X .

برهان. فرض کنیم $J = \bigcup_{x \in A} I_x$. اگر $J \neq X$ ، قرار می‌دهیم $b = \inf(X \setminus J)$. اگر عضو $y \in J$ با خاصیت $b > y$ وجود داشته باشد بایستی به ازای عضوی چون $x \in A$ داشته باشیم $y \in I_x$ و در نتیجه $b \in I_x$ و این با نحوه ساخت تناقض دارد. بنابر این $J \subset I_b$ و واضح است که $I_b \subset J$. ■

۱۷. گزاره. اگر X و Y خوشترتیب باشند، آنگاه یا X با Y ایزومورف ترتیبی است یا با قطعه اولیه‌ای در Y ایزومورف ترتیبی است یا Y با قطعه اولیه‌ای در X ایزومورف ترتیبی است.

برهان. F را مجموعه آن دسته از ایزومورفیسم‌های ترتیبی می‌گیریم که دامنه هر یک از آنها قطعه‌های اولیه‌ای در X یا خود X است و برد هر کدام قطعه اولیه‌ای در Y یا خود Y است. F نا تهی است زیرا یکتا

$$f : \{\inf X\} \rightarrow \{\inf Y\}$$

به F تعلق دارد و F با شمول جزئاً مرتب است (عضوهایش به صورت زیرمجموعه‌هایی از $X \times Y$ می‌باشد) با به کارگیری لم زورن معلوم می‌شود که F دارای عضو ماکسیمالی چون f با دامنه‌ای مثل A و بردی مانند B است. اگر $A = I_x$ و $B = I_y$ ، آنگاه $A \cup \{x\}$ و $B \cup \{y\}$ نیز قطعه‌های اولیه‌ای از X و Y هستند و با قراردادن $f(x) = y$ می‌توان f را توسعه داد که این با ماکسیمال بودن f تناقض دارد. بنابر این یا $A = X$ یا $B = Y$ (یا هر دو) و حکم حاصل می‌شود. ■

۱۸. گزاره. مجموعه شمارش‌ناپذیر خوشترتیبی مانند Ω وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in \Omega$ ، شمارش‌پذیر است. اگر Ω' مجموعه‌ای با همان خواص Ω باشد، آنگاه Ω و Ω' ایزومورف ترتیبی هستند.

برهان. بنابر اصل خوشترتیبی مجموعه‌های خوشترتیب شمارش‌ناپذیر وجود دارند؛ فرض می‌کنیم X یکی از آنها باشد. یا X خواص مطلوب را دارا است یا عضو مینیمالی چون x وجود دارد به طوری که I_x شمارش‌ناپذیر است که در این حالت می‌توان $\Omega = I_x$ را در نظر گرفت. اگر Ω' یکی دیگر از چنین مجموعه‌هایی باشد، Ω' نمی‌تواند با یک قطعه اولیه از Ω ایزومورف ترتیبی باشد و بالعکس، زیرا Ω و Ω' شمارش‌ناپذیر هستند در حالی که قطعه‌های اولیه آنها شمارش‌پذیر می‌باشند، لذا بنابر گزاره ۱۷، Ω و Ω' ایزومورف ترتیبی هستند. ■

مجموعه Ω در گزاره ۱۸، که اساساً یکتا مجموعه خوشترتیب است، مجموعه اردینال‌های شمارش‌پذیر نامیده می‌شود. این مجموعه خاصیت قابل ذکر زیر را داراست:

۱۹. گزاره، هر زیرمجموعه شمارش پذیر از Ω یک کران بالا دارد.

برهان. اگر $A \subseteq \Omega$ شمارش پذیر باشد، $\bigcup_{x \in A} I_x$ شمارش پذیر است و در نتیجه تمام Ω نیست. بنابر گزاره ۱۶، $y \in \Omega$ چنان وجود دارد که $\bigcup_{x \in A} I_x = I_y$ و در نتیجه y کران بالایی برای A است. ■

مجموعه \mathbb{N} مرکب از اعداد صحیح مثبت را می توان به صورت زیر با زیرمجموعه ای از Ω یکی گرفت قرار می دهیم $f(1) = \inf(\Omega)$ ، و با روال استقرایی قرار می دهیم $f(n) = \inf(\Omega \setminus \{f(1), \dots, f(n-1)\})$. خواننده باید تحقیق کند که f یک ایزومورفیسم ترتیبی از \mathbb{N} به I_ω است که در آن ω عضو مینیمال Ω است به قسمی که I_ω نامتناهی است. گاهی اوقات بهتر است عضو دیگری مثل ω_1 را به Ω افزوده و مجموعه ای مانند $\{\omega_1\} \cup \Omega = \Omega^*$ تشکیل دهیم و با قید $\omega_1 < x$ برای همه x های متعلق به Ω ، ترتیب روی Ω را به Ω^* توسعه دهیم. ω_1 اولین اردینال شمارش ناپذیر نامیده می شود (نماد رایج برای ω_1 ، Ω است زیرا به طور کلی ω_1 خود، مجموعه اردینال های شمارش پذیر گرفته می شود).

۵. دستگاه اعداد حقیقی توسعه یافته

اکثر اوقات افزودن دو نقطه اضافی $-\infty$ و $(+\infty)$ به \mathbb{R} برای تشکیل دستگاه اعداد حقیقی توسعه یافته $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ و توسعه ترتیب روی \mathbb{R} با قید $-\infty < x < \infty$ به ازای همه $x \in \mathbb{R}$ مفید است. در این صورت خاصیت کمال \mathbb{R} به صورت زیر در می آید: هر زیرمجموعه مانند A از $\overline{\mathbb{R}}$ کوچکترین کران بالا یا سوپرمم و یک بزرگترین کران پایین یا اینفیمم دارد که با $\sup A$ و $\inf A$ نشان داده می شوند. اگر $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ، خواهیم نوشت:

$$\max(a_1, \dots, a_n) = \sup A, \quad \min(a_1, \dots, a_n) = \inf A.$$

از خاصیت کمال \mathbb{R} معلوم می شود که هر دنباله مانند $\{x_n\}$ در $\overline{\mathbb{R}}$ دارای یک حداعلی و یک حد اسفل است:

$$\limsup x_n = \inf_{k \geq 1} (\sup_{n \geq k} x_n), \quad \liminf x_n = \sup_{k \geq 1} (\inf_{n \geq k} x_n).$$

دنباله $\{x_n\}$ (در \mathbb{R}) همگرا است اگر و تنها اگر این دو عدد مساوی (و متناهی) باشند، که در این حالت حد آن مقدار مشترک آنها است. برای توابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ نیز می توان \limsup و \liminf تعریف کرد، برای مثال:

$$\limsup_{x \rightarrow a} f(x) = \inf_{\delta > 0} (\sup_{0 < |x-a| < \delta} f(x)).$$

اعمال حسابی روی \mathbb{R} را می توان به طور جزئی به $\overline{\mathbb{R}}$ تعمیم داد:

$$x \pm \infty = \pm \infty \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty,$$

$$x \cdot (\pm \infty) = \pm \infty (x > 0), \quad x \cdot (\pm \infty) = \mp \infty (x < 0).$$

علاقه ای به تعریف $\infty - \infty$ نداریم، اما برقرارداد زیر پایندیم در غیر این صورت تصریح خواهد شد:

$$0 \cdot (\pm \infty) = 0.$$

(عبارت $0 \cdot \infty$ هم اکنون ظاهر شد و سپس در نظریه اندازه به کار برده می شود و به دلایل متعددی تعبیر محض آن تقریباً

همیشه صفر است.)

در \mathbb{R} نمادگذاری زیر را برای بازه‌ها به کار می‌بریم: اگر $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ، آنگاه

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}, \quad [a, b] = \{x : a \leq x \leq b\},$$

$$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}, \quad [a, b) = \{x : a \leq x < b\}.$$

گاهی از اوقات به مجموع‌های شمارش‌ناپذیر از اعداد نامنفی برخورد خواهیم خورد. اگر X مجموعه‌ای دل‌خواه و $f : X \rightarrow [0, \infty]$ یک نگاشت باشد، $\sum_{x \in X} f(x)$ را سوپریم مجموع‌های جزئی متناهی آن تعریف می‌کنیم:

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sup \left\{ \sum_{x \in F} f(x) : F, F \subset X \text{ متناهی است} \right\}.$$

(بعدها این مجموع را به عنوان انتگرال f نسبت به اندازه شمارشی روی X معرفی خواهیم کرد.)

۲۰. گزاره. نگاشتی چون $f : X \rightarrow [0, \infty]$ مفروض است، فرض کنیم $A = \{x : f(x) > 0\}$. اگر A شمارش‌ناپذیر باشد، آنگاه $\sum_{x \in X} f(x) = \infty$. اگر A شمارش‌پذیر نامتناهی باشد، آنگاه

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(g(n))$$

که در آن $A \rightarrow \mathbb{N}$ یک دو سوئی دل‌خواه است و مجموع طرف راست یک سری نامتناهی معمولی است.

برهان. داریم $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ که در آن $A_n = \{x : f(x) > \frac{1}{n}\}$. اگر A شمارش‌ناپذیر باشد، آنگاه یکی از A_n ها باید

شمارش‌ناپذیر باشد و برای زیرمجموعه‌ای متناهی مانند F از A_n ، $\sum_{x \in F} f(x) > \frac{1}{n} \text{card}(F)$ ؛ از اینجا معلوم می‌شود که $\sum_{x \in X} f(x) = \infty$. اگر A شمارش‌پذیر نامتناهی باشد، $g : \mathbb{N} \rightarrow A$ یک دو سوئی باشد و $B_N = g(\{1, \dots, N\})$ آنگاه هر زیرمجموعه متناهی مانند F از A در یکی از B_N ها مشمول است. بنابراین

$$\sum_{x \in F} f(x) \leq \sum_{n=1}^N f(g(n)) \leq \sum_{x \in X} f(x)$$

با سوپریم گرفتن روی N به دست می‌آوریم:

$$\sum_{x \in F} f(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(g(n)) \leq \sum_{x \in X} f(x),$$

و سپس با سوپریم گرفتن روی F ، حکم مطلوب را به دست می‌آوریم. ■

برخی اصطلاحات درباره توابع با مقادیر حقیقی (توسیع یافته) می‌دانیم رابطه‌ای بین اعداد که برای توابع به کار برده می‌شود به طور نقطه‌ای برقرار است. بنابراین $f \leq g$ به این معنا است که به ازای هر x ، $f(x) \leq g(x)$ و $\max(f, g)$ تابعی است که مقدارش در x برابر $\max(f(x), g(x))$ است. اگر $X \subset \mathbb{R}$ ، نگاشت $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ صعودی نامیده می‌شود هرگاه $f(x) \leq f(y)$ برای $x \leq y$ برقرار باشد و اکیداً صعودی نامیده می‌شود هرگاه وقتی $x < y$ ، $f(x) < f(y)$ تابعی که صعودی یا نزولی باشد یکنوا نامیده می‌شود. اگر $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع صعودی باشد، آنگاه f در هر نقطه حد چپ و حد راست دارد:

$$f(a+) = \lim_{x \searrow a} f(x) = \inf_{x > a} f(x), \quad f(-a) = \lim_{x \nearrow -a} f(x) = \sup_{x < -a} f(x).$$

به علاوه، مقادیر حدی $f(\infty) = \sup_{a \in \mathbb{R}} f(x)$ و $f(-\infty) = \inf_{a \in \mathbb{R}} f(x)$ وجود دارند (ممکن است مساوی $\pm \infty$ باشند). f پیوسته راست نامیده می شود هرگاه به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ ، $f(a) = f(a+)$ و پیوسته چپ نامیده می شود هرگاه به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ ، $f(a) = f(a-)$.

برای نقطه‌ای چون x در \mathbb{R} یا \mathbb{C} ، $|x|$ نشان دهنده قدر مطلق معمولی یا قدر مطلق x یعنی $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ است. برای نقطه‌ای چون x در \mathbb{R}^n یا \mathbb{C}^n ، $|x|$ نشان دهنده نرم اقلیدسی است:

$$|x| = \left[\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

یادآوری می کنیم که مجموعه‌ای چون $U \subset \mathbb{R}$ باز است هرگاه به ازای هر $x \in U$ ، شامل بازه‌ای با مرکز x باشد.

۲۱. گزاره. هر مجموعه باز در \mathbb{R} اجتماع مجزای شمارش پذیری از بازه‌های باز است.

برهان. اگر U باز باشد، به ازای هر $x \in U$ گردایه J_x متشکل از همه بازه‌های باز I را در نظر می گیریم به طوری که $x \in I \subset U$. به آسانی دیده می شود که اجتماع هر خانواده از بازه‌های باز شامل نقطه‌ای در اشتراک، باز هم یک بازه باز است و در نتیجه $J_x = \bigcup_{I \in J_x} I$ یک بازه باز است؛ این بزرگترین عضو J_x است. اگر $x, y \in U$ ، آنگاه یا $J_x = J_y$ یا $J_x \cap J_y = \emptyset$ زیرا در غیر این صورت $J_x \cup J_y$ بازه‌بازی در J_x است که از J_x بزرگتر است. بنابراین اگر $J = \{J_x : x \in U\}$ ، آنگاه اعضای J (متمايز) مجزا هستند و $U = \bigcup_{J \in J} J$. به ازای هر $J \in J$ ، عددگویایی چون $f(J) \in J$ انتخاب می کنیم؛ نگاشت $f : J \rightarrow \mathbb{Q}$ که به این ترتیب تعریف می شود یک به یک است، زیرا اگر $J \neq J'$ ، آنگاه $J \cap J' = \emptyset$ ؛ بنابراین این J شمارش پذیر است. ■

۶. فضاهای متر

یک متر روی مجموعه‌ای چون X تابعی مانند $\rho : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ است به طوری که:

• $\rho(x, y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$ ؛

• به ازای هر x, y از X ، $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ؛

• به ازای هر x, y, z از X ، $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

(ذاتاً $\rho(x, y)$ به عنوان فاصله از x تا y تعبیر می شود.) مجموعه مجهز به یک متر یک فضای متر نامیده می شود.

چند مثال:

الف) فاصله اقلیدسی $\rho(x, y) = |x - y|$ یک متر روی \mathbb{R}^n است.

ب) $\rho_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ و $\rho_\infty(f, g) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$ مترهایی روی فضای توابع پیوسته بر $[0, 1]$ هستند.

ج) اگر ρ یک متر روی X باشد و $A \subset X$ ، آنگاه $\rho|_{(A \times A)}$ یک متر روی A است.

د) اگر (X_1, ρ_1) و (X_2, ρ_2) دو فضای متر باشند، متر حاصلضربی ρ روی $X_1 \times X_2$ با تساوی زیر تعریف می شود:

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(\rho_1(x_1, y_1), \rho_2(x_2, y_2)).$$

گاهی اوقات مترهای دیگری روی $X_1 \times X_2$ به کار برده می‌شود، برای مثال:

$$\rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2) \quad \text{یا} \quad [\rho_1(x_1, y_1)^2 + \rho_2(x_2, y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

البته به مفهومی که در آخر همین بخش تعریف خواهیم کرد این مترها با متر حاصلضربی هم‌ارز هستند. فرض کنید (X, ρ) یک فضای متری باشد. اگر $x \in X$ و $r > 0$ ، گوی (باز) به شعاع r حول x عبارت است از:

$$B(r, x) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}.$$

مجموعه‌ای چون $E \subset X$ باز است هرگاه به ازای هر $x \in E$ عددی مانند $r > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $B(r, x) \subset E$ و بسته است هرگاه متمم آن باز باشد. برای مثال، هرگویی باز مانند $B(r, x)$ باز است زیرا اگر $\rho(x, y) < s$ و $y \in B(r, x)$ ، آنگاه $B(r-s, y) \subset B(r, x)$ و همچنین X هم باز و هم بسته هستند. به وضوح اجتماع هر خانواده از مجموعه‌های باز، باز است و در نتیجه اشتراک هر خانواده از مجموعه‌های بسته، بسته است. علاوه بر اینها، اشتراک (متناظراً اجتماع) هر خانواده متناهی از مجموعه‌های باز (متناظراً بسته) باز (متناظراً بسته) است. در واقع، اگر U_1, \dots, U_n باز باشند و $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ ، آنگاه به ازای هر $r > 0$ وجود دارد به طوری که $B(r, x) \subset U_i$ و در نتیجه $B(r, x) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$ ، که در آن $r = \min(r_1, \dots, r_n)$ ، لذا $\bigcap_{i=1}^n U_i$ باز است.

اگر $E \subset X$ ، اجتماع همه مجموعه‌های باز مانند $U \subset E$ بزرگترین مجموعه‌ی بازی است که در E مشمول است؛ این مجموعه درون E نامیده شده و با E° نشان داده می‌شود. به طور مشابه، اشتراک همه مجموعه‌های بسته مثل $F \supset E$ کوچکترین مجموعه‌ی بسته‌ای است که شامل E است؛ آن را بستار E نامیده و با \bar{E} نشان می‌دهند. در X چگال نامیده می‌شود هرگاه $\bar{E} = X$ و هیچ‌جا چگال نامیده می‌شود هرگاه \bar{E} درون تهی داشته باشد. X جدایی‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه زیرمجموعه‌ی چگال شمارش‌پذیری داشته باشد. (برای مثال، \mathbb{Q} زیرمجموعه‌ی چگال شمارش‌پذیری در \mathbb{R}^n است.) دنباله‌ای چون $\{x_n\}$ در X به $x \in X$ همگرا است (و به طور نمادین چنین نوشته می‌شود: $x_n \rightarrow x$ یا $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$) هرگاه $(\lim x_n = x)$.

۲۲. گزاره. اگر X یک فضای متری باشد، $E \subset X$ ، و $x \in X$ ، آنگاه گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(الف) $x \in \bar{E}$ ؛

(ب) به ازای هر $r > 0$ ، $B(r, x) \cap E \neq \emptyset$ ؛

(ج) دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در E وجود دارد که به x همگرا است.

برهان. اگر $B(r, x) \cap E \neq \emptyset$ ، آنگاه $B(r, x)$ مجموعه‌ی بسته‌ای است که شامل E بوده و شامل x نیست، لذا $x \notin \bar{E}$. به عکس، اگر $x \notin \bar{E}$ ، چون $(\bar{E})^c \subset E^c$ باز است $r > 0$ چنان وجود دارد که $B(r, x) \subset (\bar{E})^c$. بنابراین $B(r, x) \cap E = \emptyset$ ، لذا $x \notin \bar{E}$. از طرف دیگر، اگر $B(r, x) \cap E = \emptyset$ ، آنگاه به ازای هر $r > 0$ ، $B(r, x) \cap E = \emptyset$ ، لذا هیچ دنباله‌ای از E نمی‌تواند به x همگرا باشد. بنابراین (ب) یا (ج) هم‌ارز است. ■

اگر (X_1, ρ_1) و (X_2, ρ_2) دو فضای متری باشند، نگاشتی چون $f: X_1 \rightarrow X_2$ در $X \in X$ پیوسته نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $\rho_1(x, y) < \delta$ ، آنگاه $\rho_2(f(y), f(x)) < \varepsilon$ ، به عبارت دیگر $f^{-1}(B(\varepsilon, f(x))) \supset B(\delta, x)$. نگاشت f پیوسته نامیده می‌شود هرگاه در هر $x \in X_1$ پیوسته باشد و پیوسته یکنواخت نامیده می‌شود هرگاه علاوه بر اینها، در تعریف پیوستگی بتوان δ را مستقل از x انتخاب کرد. ■

۲۳. گزاره. $f: X_1 \rightarrow X_2$ پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر مجموعه باز مانند $U \subset X_2$ ، $f^{-1}(U)$ در X_1 باز باشد.

برهان. اگر شرط اخیر برقرار باشد، آنگاه به ازای هر $x \in X$ و $\varepsilon > 0$ ، مجموعه $f^{-1}(B(\varepsilon, f(x)))$ باز و شامل x است، پس شامل یک گوی حول x است؛ این به معنی پیوستگی f در x است. به عکس، فرض کنیم f پیوسته و U در X_2 باز است. به ازای هر $y \in U$ عددی مانند $\varepsilon_y > 0$ چنان وجود دارد که $B(\varepsilon_y, y) \subset U$ ، و به ازای هر $x \in f^{-1}(\{y\})$ عددی مانند $\delta_x > 0$ چنان وجود دارد که

$$B(\delta_x, x) \subset f^{-1}(B(\varepsilon_y, y)) \subset f^{-1}(U).$$

بنابر این $f^{-1}(U) = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} B(\delta_x, x)$ باز است. ■

دنباله‌ای چون $\{x_n\}$ در یک فضای متری مانند (X, ρ) کششی نامیده می‌شود هرگاه وقتی $n, m \rightarrow \infty$ ، $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$. زیرمجموعه‌ای چون E از X کامل نامیده می‌شود هرگاه هر دنباله کششی در E همگرا بوده و حدش در E واقع باشد. به عنوان مثال، \mathbb{R}^n (با متر اقلیدسی) کامل است در حالی که \mathbb{Q}^n چنین نیست.

۲۴. گزاره. هر زیرمجموعه بسته از یک فضای متری کامل، کامل است و هر زیرمجموعه کامل از یک فضای متری دل‌خواه، بسته است.

برهان. اگر X کامل، $E \subset X$ بسته و $\{x_n\}$ یک دنباله کششی در E باشد، آنگاه $\{x_n\}$ حدی مانند x در X دارد. بنابر گزاره ۲۲. دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در E یافت می‌شود که به x همگرا است. $\{x_n\}$ کششی است، پس حدش در E قرار دارد؛ بنابر این $E = \overline{E}$. ■

در یک فضای متری مانند (X, ρ) می‌توانیم فاصله از یک نقطه تا یک مجموعه و فاصله بین دو مجموعه را تعریف کنیم.

یعنی، اگر $x \in X$ و $E, F \subset X$ ، آنگاه

$$\rho(x, E) = \inf\{\rho(x, y) : y \in E\}$$

$$\rho(E, F) = \inf\{\rho(x, y) : x \in E, y \in F\} = \inf\{\rho(x, F) : x \in \bar{E}\}.$$

ملاحظه کنید که بنا بر گزاره ۰.۲۲، $\rho(x, E) = 0$ ، اگر و تنها اگر $x \in \bar{E}$. قطر $E \subset X$ را نیز چنین تعریف می کنیم:

$$\text{diam } E = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in E\}.$$

E کراندار نامیده می شود هر گاه $\text{diam } E < \infty$.

اگر $E \subset X$ و $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ خانواده ای از مجموعه ها باشد به طوری که $E \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ ، آنگاه $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ یک پوشش E نامیده می شود و گفته می شود که E با V_α ها پوشانده می شود. E کراندار کلی نامیده می شود هر گاه، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، E را بتوان با تعدادی متناهی از گوی های به شعاع ε پوشاند. هر مجموعه کراندار کلی، کراندار است زیرا اگر

$$x, y \in \bigcup_{j=1}^n B(\varepsilon, z_j), \text{ مثلاً } x \in B(\varepsilon, z_1) \text{ و } y \in B(\varepsilon, z_1), \text{ آنگاه}$$

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z_1) + \rho(z_1, z_1) + \rho(z_1, y) \leq 2\varepsilon + \max\{\rho(z_j, z_k) : 1 \leq j, k \leq n\}.$$

(در حالت کلی عکس مطلب فوق نادرست است.) اگر E کراندار کلی باشد \bar{E} نیز کراندار کلی است، زیرا به آسانی دیده می شود که اگر $E \subset \bigcup_{j=1}^n B(\varepsilon, z_j)$ ، آنگاه $\bar{E} \subset \bigcup_{j=1}^n B(2\varepsilon, z_j)$.

۰.۲۵ قضیه. اگر E زیرمجموعه ای از فضای متری (X, ρ) باشد، گزاره های زیر هم ارزند:

(الف) E کامل و کراندار کلی است؛

(ب) (خاصیت بولزانو-وایرستراس) هر دنباله در E زیردنباله ای دارد که به نقطه ای از E همگراست؛

(ج) (خاصیت هایانه - برل) اگر $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ پوششی از E به وسیله مجموعه های باز باشد؛ مجموعه ای متناهی مانند $F \subset A$ وجود دارد به طوری که مجموعه $\{V_\alpha\}_{\alpha \in F}$ را می پوشاند.

برهان. نشان خواهیم داد که (الف) و (ب) هم ارزند، (الف) و (ب) توأم (ج) را ایجاب می کنند و در نهایت (ج) قسمت (ب) را نتیجه می دهد.

(الف) قسمت (ب) را نتیجه می دهد: فرض می کنیم (الف) برقرار باشد و $\{x_n\}$ دنباله ای در E باشد. E را می توان با تعدادی متناهی گوی با شعاع 2^{-1} پوشاند و حداقل یکی از آن ها باید شامل تعدادی نامتناهی از x_n ها باشد، مثلاً به ازای $x_n \in B_1, n \in N_1, E \cap B_1$ را می توان با تعدادی متناهی گوی با شعاع 2^{-2} پوشاند و حداقل یکی از آنها باید به ازای تعدادی نامتناهی $n \in N_1$ شامل x_n باشد؛ مثلاً به ازای $x_n \in B_1, n \in N_1$ با ادامه روند استقرایی، دنباله ای از گوی های B_j با شعاع 2^{-j} و دنباله ای نزولی از زیرمجموعه های N_j از N به دست می آوریم به طوری که به ازای $n \in N_j, x_n \in B_j, n_1 \in N_1, n_2 \in N_2, \dots$ را چنان می گیریم که $n_1 < n_2 < \dots$. در این صورت $\{x_{n_j}\}$ یک دنباله کشی است زیرا اگر $j > k$ ، $\rho(x_{n_j}, x_{n_k}) < 2^{1-j}$ و چون E کامل است این دنباله حدی در E دارد.

(ب) قسمت (الف) را ایجاب می کند: نشان می دهیم که اگر شرطی در (الف) نادرست باشد، (ب) نیز نادرست است. اگر E کامل نباشد، دنباله ای کشی مانند $\{x_n\}$ در E وجود دارد که حدی در E ندارد. هیچکدام از زیردنباله های $\{x_n\}$ نمی توانند در E همگرا باشند، زیرا در غیر این صورت کل دنباله به همان حد همگرا خواهد بود. از طرف دیگر، اگر E کراندار کلی نباشد،

فرض می‌کنیم $\epsilon > 0$ چنان باشد که E را نتوان با تعدادی متناهی از گوی‌های با شعاع ϵ پوشاند. $x_n \in E$ را به طور استقرایی به صورت زیر انتخاب می‌کنیم. با $x_1 \in E$ شروع کرده و با انتخاب x_1, \dots, x_n ، عضو x_{n+1} را از $E \setminus \bigcup_{j=1}^n B(\epsilon, x_j)$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت به ازای هر n, m ، $\rho(x_n, x_m) > \epsilon$ ، لذا $\{x_n\}$ زیردنباله‌ای همگرا ندارد.

(الف) و (ب) قسمت (ج) را نتیجه می‌دهند: کافی است نشان دهیم که اگر (ب) برقرار باشد و $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ پوششی از E به وسیله مجموعه‌های باز باشد، آنگاه $\epsilon > 0$ چنان وجود دارد که هر گوی به شعاع ϵ که E را قطع کند در یکی از V_α ها مشمول است، زیرا بنا بر (الف) E را می‌توان با تعدادی متناهی از چنین گوی‌هایی پوشاند. به برهان خلف، فرض می‌کنیم که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ گویی به شعاع 2^{-n} مانند B_n وجود دارد به طوری که $B_n \cap E \neq \emptyset$ و B_n در هیچکدام از V_α ها مشمول نیست. عضوی مانند $x_n \in B_n \cap E$ انتخاب می‌کنیم؛ با عبور به یک زیردنباله می‌توانیم فرض کنیم که $\{x_n\}$ به عضوی چون x از E همگرا است. به ازای اندیسی چون α داریم $x \in V_\alpha$ و چون V_α باز است عددی مانند $\epsilon > 0$ وجود دارد به طوری که $B_n \subset B(\epsilon, x) \subset V_\alpha$ ، اما اگر n به اندازه کافی بزرگ بوده و در نتیجه $2^{-n} < \frac{\epsilon}{3}$ و $\rho(x_n, x) < \frac{\epsilon}{3}$ ، آنگاه $B_n \subset B(\epsilon, x) \subset V_\alpha$ که فرض نهاده شده بر B_n را نقض می‌کند.

(ج) قسمت (ب) را ایجاب می‌کند: چنانچه $\{x_n\}$ دنباله‌ای در E باشد که هیچ زیردنباله همگرا نداشته باشد، به ازای هر $x \in E$ یک گوی با مرکز x مانند B_x وجود دارد که فقط به ازای تعدادی متناهی از n ها شامل x_n است (در غیر این صورت) برخی از زیردنباله‌ها به x همگرا خواهند بود. در نتیجه $\{B_x\}_{x \in E}$ پوششی از E به وسیله مجموعه‌های باز است که هیچ زیرپوششی متناهی ندارد. ■

مجموعه‌ای چون E که دارای خواص (الف)، (ب) و (ج) از قضیه ۰.۲۵ است فشرده نامیده می‌شود. بنا بر گزاره ۰.۲۴، هر مجموعه فشرده، بسته و کراندار است؛ عکس آن در حالت کلی نادرست است اما در مورد \mathbb{R}^n درست است.

۰.۲۶. گزاره. هر زیرمجموعه بسته و کراندار \mathbb{R}^n فشرده است.

برهان. چون زیرمجموعه‌های بسته \mathbb{R}^n کامل هستند، کافی است نشان دهیم که زیرمجموعه‌های کراندار \mathbb{R}^n کراندار کلی هستند. از آنجا که هر مجموعه کراندار در مکعبی مانند

$$Q = [-R, R]^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \max(|x_1|, \dots, |x_n|) \leq R\}$$

مشمول است، کافی است نشان دهیم که Q کراندار کلی است. $\epsilon > 0$ را مفروض گرفته و عدد صحیحی چون $k > \frac{R\sqrt{n}}{\epsilon}$ برگزیده و با تقسیم بازه $[-R, R]$ به k قطعه مساوی، Q را به صورت اجتماع k^n زیرمکعب همبسته نمایش می‌دهیم. طول یال این زیرمکعب‌ها $\frac{2R}{k}$ است و در نتیجه قطرشان $\sqrt{n} \left(\frac{2R}{k}\right) < \epsilon$ است، لذا این زیرمکعب‌ها در گوی‌های با شعاع ϵ حول مرکزشان مشمول هستند. ■

دو متر ρ_1 و ρ_2 روی مجموعه‌ای چون X هم‌ارز نامیده می‌شوند هرگاه به ازای اعدادی مانند $C, C' > 0$,

$$C\rho_1 \leq \rho_2 \leq C'\rho_1.$$

به آسانی معلوم می‌شود که مترهای هم‌ارز، مجموعه‌های باز، بسته و فشرده یکسان، دنباله‌های هم‌گرا و کشی یکسان و نگاشت‌های پیوسته و پیوسته یکنواخت یکسانی تعریف می‌کنند. نتیجتاً، اکثر حکم‌های درباره فضاهاى مترى نه به متر خاص انتخاب شده بلکه فقط به رده هم‌ارزی آن بستگی دارد.

۰.۷ + تذکرات و مراجع

بندهای ۰.۱ تا ۰.۴: بهترین شرح و بیان نظریه مجموعه‌ها برای مبتدیان هالموس [۶۳] است و اسمالیان و فیتینگ [۱۳۵] کتاب خوبی برای سطح پیشرفته تر است. کلی [۸۳] نیز شامل بخش خلاصه‌ای از اصول موضوع نظریه مجموعه است. همه این کتاب‌ها مثل هویت و استرامبرگ [۷۶] از روی اصل انتخاب استنباطی برای اصل ماکسیمال هاسدورف آورده‌اند. عموماً اصل انتخاب (یا یکی از گزاره‌های معادل با آن) به عنوان یکی از بدیهیات بنیادی در نظریه مجموعه‌ها پذیرفته می‌شود. بعضی از ریاضی دان‌های شهودگرا یا ساختارگرا آن را رد کرده و دلیلشان را این گونه بیان می‌دارند که وجود یک شیء ریاضی تازمانی که آن را نتوان به روش صریح و قابل قبولی ساخت اثبات نگردیده است، حال آنکه تمام مقصود از اصل انتخاب اثبات قضایای وجود به هنگامی است که روش‌های ساختنی ناکام هستند (یا برای حصول اطمینان بسیار پردردسر هستند) کسانی که از چنین اشیایی به شدت رنج می‌برند در اقلیت قرار دارند و شامل من نمی‌شود؛ در این کتاب، اصل انتخاب کم اما آزادانه به کار رفته است.

فرضیه پیوستار چنین است: «اگر $\text{card}(X) < c$ ، آنگاه X شمارش پذیر است.»

(تا آنجا که از نحوه ساختن Ω ، یعنی، مجموعه اردینال‌های شمارش پذیر برمی‌آید برای هر مجموعه شمارش ناپذیر مانند X ، $\text{card}(\Omega) < \text{card}(X)$. یک حکم معادل برای فرضیه پیوستار عبارت است از: $\text{card}(\Omega) = c$.) به لطف گودل و کهن، معلوم شده است که فرضیه پیوستار و نفی آن هر دو با اصول موضوع متعارف نظریه مجموعه‌ای که شامل اصل انتخاب باشد سازگاری دارند به شرطی که این اصول موضوع خودشان با هم سازگار باشند. (شرحی از قضایای سازگار و مستقل برای اصل انتخاب و فرضیه پیوستار در اسمالیان و فیتینگ [۱۳۵] یافت می‌شود.) برخی از ریاضی دان‌ها به پذیرش اصل انتخاب به عنوان یک اسباب راحتی رضایت می‌دهند، اما گودل [۵۶] و کهن [صفحه ۱۵۱ از ۲۶] هر دو بر این باورند که فرضیه پیوستار باید نادرست باشد، اما در نوشته‌های آنها هیچ دلیل قانع کننده‌ای مبنی بر درستی یا نادرستی فرضیه پیوستار یافت نمی‌شود.

نظر من در رابطه با تجدید نظر در ایجاد یک اصل بنیادی در نظریه مجموعه‌ها و فائق آمدن بر آن، این است که اگر پاسخ به پرسشی به فرضیه پیوستار وابسته شد، آن را رها کرده و سؤال دیگری مطرح کنیم.

فصل اول

اندازه‌ها

در این فصل، با بیان مباحث اساسی نظریه اندازه، روالی کلی برای ساختن مثال‌هایی نابديهی تدوین می‌کنیم و از این روال برای ساختن اندازه روی خط حقیقی استفاده می‌کنیم.

۱.۱ مقدمه

یکی از مسائل بارز در هندسه، تعیین مساحت یا حجم ناحیه‌ای در صفحه یا فضای ۳- بعدی است. شگردهای حساب انتگرال برای ناحیه‌های محدود به منحنی‌ها یا رویه‌های خوشرفتار پاسخ رضایتبخشی می‌دهند اما در مورد مجموعه‌های پیچیده‌تر، چنین شگردهایی مناسب نیستند حتی اگر ناحیه مورد نظر ۱- بعدی باشد.

به طور آرمانی می‌خواهیم به ازای هر عدد طبیعی n ، تابعی چون μ داشته باشیم که به هر $E \subset \mathbb{R}$ عددی چون $\mu(E) \in [0, \infty]$ موسوم به اندازه n - بعدی نسبت دهد به طوری که هنگام محاسبه، $\mu(E)$ به وسیله فرمول‌های انتگرال معمولی داده شود. مسلماً چنین تابعی باید خواص زیر را داشته باشد:

الف) اگر E_1, E_2, \dots دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی از مجموعه‌های مجزا باشد، آنگاه

$$\mu(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \dots$$

ب) اگر E با F همپوشان باشد (یعنی، اگر E را بتوان با انتقال، دوران و انعکاس به F تبدیل کرد)، آنگاه $\mu(E) = \mu(F)$.

ج) $\mu(Q) = 1$ که در آن Q مکعب واحد زیر است:

$$Q = \{X \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j < 1, j = 1, \dots, n\}.$$

متأسفانه این شرایط از دو طرف ناچور هستند. اینک عدم تحقق همزمان شرایط فوق را برای $n = 1$ بررسی می‌کنیم (استدلال را به آسانی می‌توان به ابعاد بالاتر تعمیم داد).

ابتدا یک رابطه هم‌ارزی مانند \sim روی $[0, 1]$ تعریف می‌کنیم:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

فرض می‌کنیم N زیرمجموعه‌ای از $[0, 1]$ باشد که از هر رده هم‌ارزی درست یک عضو دارد. (برای یافتن چنین مجموعه‌ای باید اصل انتخاب را به کار ببریم). اکنون فرض می‌کنیم $R = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ و به ازای هر $r \in R$ قرار می‌دهیم:

$$N_r = \{x + r : x \in N \cap [0, 1 - r]\} \cup \{x + r - 1 : x \in N \cap [1 - r, 1]\}.$$

به عبارتی برای به دست آوردن N_r ، N را به مقدار r واحد به راست حرکت می‌دهیم و سپس قسمتی را که بیرون از $[0, 1]$ می‌افتد به مقدار ۱ واحد به چپ انتقال می‌دهیم. در این صورت $N_r \subset [0, 1]$ و هر $x \in [0, 1]$ درست به یکی از N_r ها تعلق دارد. اما اگر y عضوی از N باشد که به رده هم‌ارزی شامل x تعلق داشته باشد، آنگاه $x \in N_r$ که در آن

$$r = \begin{cases} x - y & x \geq y; \\ x - y + 1 & x < y. \end{cases}$$

از طرف دیگر، اگر $x \in N_r \cap N_s$ ، آنگاه $x - r$ (یا $x - r + 1$) و $x - s$ (یا $x - s + 1$) اعضای متمایزی از

N هستند که به یک رده هم‌ارزی تعلق دارند و این ممکن نیست. اکنون فرض می‌کنیم $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ در شرایط

(الف)، (ب) و (ج) صدق کند. بنابر (الف) و (ب)، به ازای هر $r \in R$ داریم:

$$\mu(N) = \mu(N \cap [0, 1 - r]) + \mu(N \cap [1 - r, 1]) = \mu(N_r).$$

همچنین، چون R شمارش‌پذیر و $[0, 1]$ اجتماع مجزای N_r ها است، باز هم بنابر (الف) خواهیم داشت:

$$\mu([0, 1]) = \sum_{r \in R} \mu(N_r).$$

اما بنابر (ج)، $\mu([0, 1]) = 1$ و چون $\mu(N_r) = \mu(N)$ ، مجموع سمت راست یا صفر است (هرگاه $\mu(N) = 0$) یا ∞ (هرگاه $\mu(N) > 0$). بنابر این تابع μ با شرایط مذکور نمی‌تواند وجود داشته باشد.

علیرغم این موضوع دلسردکننده، می‌توان شرط (الف) را چنان تضعیف کرد که جمعی بودن μ فقط برای دنباله‌های متناهی برقرار باشد. همان‌گونه که خواهیم دید این ایده، ایده خیلی خوبی نیست: جمعی شمارش‌پذیر بودن چیزی است که همه

محدوبیت‌ها را رفع می‌کند و احکام بی‌درپی نظریه به‌طور سلیس کار می‌کنند. به‌علاوه، در ابعاد $n \geq 3$ حتی همین شکل ضعیف شده (الف) با شرایط (ب) و (ج) سازگاری ندارد. البته در سال ۱۹۲۴ باناخ و تارسکی حکم شگفت‌انگیز زیر را ثابت کردند:

فرض کنیم U و V مجموعه‌های باز دل‌خواهی در \mathbb{R}^n باشند و $n \geq 3$. در این صورت عددی طبیعی مانند k و زیرمجموعه‌هایی چون E_1, \dots, E_k و F_1, \dots, F_k از \mathbb{R}^n وجود دارند به‌طوری‌که

- E_j ها مجزا هستند و اجتماعشان U است؛

- F_j ها مجزا هستند و اجتماعشان V است؛

- به ازای $j = 1, \dots, k$ ، E_j با F_j هم‌نهشت است.

بنابر این می‌توان یک گوی به اندازه یک نخود را به تعدادی متناهی قطعه شکست و با جابجایی آنها گویی به اندازه کره زمین ساخت! لازم به ذکر است که E_j ها و F_j ها مجموعه‌هایی بسیار عجیب و غریب هستند. به درستی نمی‌توان آنها را تجسم کرد و ساختن آنها به اصل انتخاب وابسته است. اما وجود چنین مجموعه‌هایی از ساختن هر تابع مانند $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ که

به ازای مجموعه‌های باز کراندار مقادیر مثبت و متناهی داشته و به ازای دنباله‌های متناهی مانند آنچه در (ب) ذکر شد، در شرط (الف) صدق کند جلوگیری می‌کند. این مثال‌ها نشان می‌دهند که \mathbb{R}^n شامل زیرمجموعه‌هایی است که چنان در هم پیچیده‌اند که ممکن نیست یک مفهوم معقول هندسی برای اندازه آنها تعریف کنیم و چاره‌ای جز این نیست که از تلاش برای تعریف μ روی همه زیرمجموعه‌های \mathbb{R}^n دست برداریم. به ساختن μ روی دسته‌ای از زیرمجموعه‌های \mathbb{R}^n بسنده خواهیم کرد که احتمالاً در تمرین‌ها با آنها مواجه می‌شویم به جز یک مورد که برای ساختن مثال نقض است.

این کار برای $n = 1$ در بند ۱.۵ و برای $n > 1$ در بند ۲.۶ انجام خواهد شد. بسط نظریه به حالت کلی‌تر کار مشکلی نیست و به زحمتش می‌آرزد. شرایط (الف) و (ب) مستقیماً به هندسه اقلیدسی مربوط می‌شوند اما تابع مجموعه‌های صادق در شرط (الف) موسوم به اندازه، در بسیاری از مباحث دیگر ظاهر می‌شوند. برای مثال، در یک مسئله فیزیکی شامل توزیع جرم، می‌توان از $\mu(E)$ برای نمایش جرم کلی در ناحیه E استفاده کرد. به عنوان مثالی دیگر، در نظریه احتمال، مجموعه‌ای چون X در نظر گرفته می‌شود که امکان رخ دادن یک پیشامد را بیان می‌دارد و برای $E \subset X$ ، $\mu(E)$ احتمالی است که برآمد در E واقع باشد. بنابر این با مطالعه نظریه اندازه روی مجموعه‌های خام شروع می‌کنیم.

۱.۲ - جبرها - σ

در این بخش در مورد خانواده‌هایی از مجموعه‌ها بحث می‌کنیم که به عنوان دامنه‌های اندازه‌ها به کار می‌روند. فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی باشد. یک جبر از مجموعه‌ها روی X ، گردایه‌ای ناتهی چون \mathcal{A} از زیرمجموعه‌های X است که تحت اجتماع‌های متناهی و متممگیری بسته است؛ به عبارت دیگر، اگر $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ ، آنگاه $\bigcup_{j=1}^n E_j \in \mathcal{A}$ و اگر $E \in \mathcal{A}$ ، آنگاه $E^c \in \mathcal{A}$. یک σ -جبر، جبری است که تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر بسته است. (برخی از مؤلفین واژه میدان یا σ -میدان را به جای جبر و σ -جبر به کار می‌برند). ملاحظه می‌کنیم که چون $\bigcup_j E_j^c = (\bigcap_j E_j)^c$ ، جبرها (متناظر σ -جبرها) تحت اشتراک‌های متناهی (متناظر شمارش‌پذیر) بسته‌اند. به علاوه، اگر \mathcal{A} یک جبر باشد، آنگاه $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ زیرا اگر $E \in \mathcal{A}$ ، آنگاه $\emptyset = E \cap E^c$ و $X = E \cup E^c$ به آسانی می‌توان دید که جبری چون \mathcal{A} یک σ -جبر است هر گاه تحت اجتماع‌های مجزای شمارش‌پذیر بسته باشد. برای اثبات این مطلب فرض می‌کنیم $\{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{A}$ و قرار می‌دهیم

$$F_k = E_k \setminus \left[\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \right] = E_k \cap \left[\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \right]^c.$$

در این صورت F_k ها به \mathcal{A} تعلق دارند و مجزا هستند و $\bigcup_1^\infty E_j = \bigcup_1^\infty F_k$.

طرح جایگزینی دنباله‌ای از مجموعه‌ها با دنباله‌ای مجزا، یادآوری ارزشمندی است. از این مطلب در زیر بارها استفاده خواهیم کرد.

چند مثال: چنانچه X مجموعه‌ای دل‌خواه باشد، $\{\emptyset, X\}$ و $\mathcal{P}(X)$ جبرهایی روی X هستند. اگر X شمارش‌ناپذیر باشد، آنگاه

$$\mathcal{A} = \{E \subset X : E \text{ شمارش‌پذیر است یا } E^c \text{ شمارش‌پذیر است}\}$$

یک σ -جبر موسوم به σ -جبر شمارش‌پذیر یا متمم شمارش‌پذیر از مجموعه‌ها است. (نکته اصلی این است که اگر $\mathcal{A} \subset \{E_i\}_1^\infty$ ، آنگاه $\bigcup_1^\infty E_i$ شمارش‌پذیر است به شرطی که همه E_i ها شمارش‌پذیر باشند و در غیر این صورت متمم آن شمارش‌پذیر است.)

بدیهی است که اشتراک هر خانواده از σ -جبرهای روی X باز هم یک σ -جبر است. از اینجا معلوم می‌شود که اگر \mathcal{E} زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{P}(X)$ باشد، آنگاه کوچکترین σ -جبر یکتای $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ وجود دارد که شامل \mathcal{E} است، $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ اشتراک همه σ -جبرهای شامل \mathcal{E} است و آن را σ -جبر تولید شده با \mathcal{E} می‌نامیم (همیشه دست کم یکی از این σ -جبرها وجود دارد. در واقع $\mathcal{P}(X)$ یکی از آنها است). ملاحظات زیر اغلب مفید هستند:

$$1.1 \text{ ل.م.ا اگر } \mathcal{E} \subset \mathcal{M}(\mathcal{F}), \text{ آنگاه } \mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{F}).$$

برهان. $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ یک σ -جبر شامل \mathcal{E} است؛ بنابراین شامل $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ است. ■

چنانچه X یک فضای متری یا به طور کلی یک فضای توپولوژیک باشد (فصل ۴ را ببینید)، σ -جبر تولید شده به وسیله خانواده مجموعه‌های باز واقع در X ، σ -جبر بزل روی X نامیده می‌شود و آن را با \mathcal{B}_X نشان می‌دهیم. اعضای σ -جبر بزل را مجموعه‌های بزل می‌نامیم. بنا بر این \mathcal{B}_X شامل مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بسته، اشتراک‌های شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز، اجتماع‌های شمارش‌پذیر از مجموعه‌های بسته و غیره است. برای درجه‌بندی این مجموعه‌ها نامگذاری استاندارد وجود دارد. هر اشتراک شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز یک مجموعه G_δ و هر اجتماع شمارش‌پذیر از مجموعه‌های بسته، یک مجموعه F_σ نامیده می‌شود؛ هر اجتماع شمارش‌پذیر از مجموعه‌های G_δ را یک مجموعه $G_{\delta\sigma}$ نامیم و هر اشتراک شمارش‌پذیر از مجموعه‌های F_σ را یک مجموعه $F_{\sigma\delta}$ می‌نامیم و الی آخر. (δ, σ از واژه‌های آلمانی *Summe* و *Durchschnitt* به معانی اجتماع و اشتراک برگرفته شده‌اند).

در عمل σ -جبر بزل روی \mathbb{R} یک نقش اساسی دارد. برای اطلاع بیشتر توجه می‌کنیم که این σ -جبر را می‌توان به روش‌های دیگری نیز تولید کرد.

- الف) بازه‌های باز: $\mathcal{E}_1 = \{(a, b) : a < b\}$
 ب) بازه‌های بسته: $\mathcal{E}_2 = \{(a, b) : a < b\}$
 ج) بازه‌های نیم‌باز: $\mathcal{E}_3 = \{(a, b) : a < b\}$ یا $\mathcal{E}_4 = \{(a, b) : a < b\}$
 د) نیم‌خط‌های باز: $\mathcal{E}_5 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ یا $\mathcal{E}_6 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$
 ه) نیم‌خط‌های بسته: $\mathcal{E}_7 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ یا $\mathcal{E}_8 = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$

برهان. به ازای $3, 4 \neq j$ ، اعضای \mathcal{E}_j باز یا بسته هستند و اعضای \mathcal{E}_3 و \mathcal{E}_4 همگی مجموعه‌های G هستند. برای مثال، $(a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b + n^{-1})$. همه اینها مجموعه‌های برل هستند، پس بنا بر لم ۱.۱، $\mathcal{M}(\mathcal{E}_j) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ به ازای همه j ها برقرار است. از سوی دیگر هر مجموعه باز در \mathbb{R} اجتماع شمارش‌پذیری از بازه‌های باز است، پس باز هم بنا بر لم ۱.۱، $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$. اکنون با نشان دادن اینکه همه بازه‌های باز در $\mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$ واقع‌اند و بنا به کار بردن لم ۱.۱ می‌بینیم که به ازای $j \geq 2$ ، $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{M}(\mathcal{E}_j)$. برای مثال

$$(a, b) = \bigcup_{n_0}^{\infty} [a + n^{-1}, b - n^{-1}] \in \mathcal{M}(\mathcal{E}_1).$$

که در آن n طوری انتخاب شده است که $b - n^{-1} \geq a + n^{-1}$ و لذا برای هر $n \geq n_0$ ، $b - n^{-1} \geq a + n^{-1}$ وجود چنین n ی از خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی نتیجه می‌شود. بررسی حالت‌های دیگر به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۲). ■

فرض کنیم $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ یک گردایه اندیس‌گذاری شده از مجموعه‌های ناتهی باشد، $X = \prod_{\alpha \in A} X_{\alpha}$ و $\pi_{\alpha} : X \rightarrow X_{\alpha}$ نگاشت‌های مؤلفه‌ای باشند. چنانچه به ازای هر α ، \mathcal{M}_{α} یک σ -جبر روی X_{α} باشد، σ -جبر حاصلضربی روی X همان σ -جبر تولید شده به وسیله گردایه زیر است:

$$\{\pi_{\alpha}^{-1}(E_{\alpha}) : E_{\alpha} \in \mathcal{M}_{\alpha}, \alpha \in A\}.$$

این σ -جبر را با $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_{\alpha}$ نشان می‌دهیم. (چنانچه $A = \{1, 2, \dots, n\}$ ، چنین نیز می‌نویسیم $\bigotimes_1^n \mathcal{M}$ یا $\mathcal{M}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_n$). معنی این تعریف در بند ۲.۱ روشن خواهد شد؛ به‌خاطر اهمیتی که دارد، در حالتی که تعداد عامل‌ها شمارش‌پذیر است، یک ویژگی میانی یا شاید بسیار شهودی σ -جبر را ارائه می‌دهیم.

۱.۳ گزاره. اگر A شمارش‌پذیر باشد، آنگاه $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_{\alpha}$ ، σ -جبر تولید شده به‌وسیله

$$\left\{ \prod_{\alpha \in A} E_{\alpha} : E_{\alpha} \in \mathcal{M}_{\alpha} \right\}$$

است.

برهان. اگر $E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha$ ، آنگاه $\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) = \prod_{\beta \in A} E_\beta$ که در آن به ازای $\alpha \neq \beta$ داریم $E_\beta = X_\beta$ ؛ از سوی دیگر، $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$ ، بنابراین حکم از لم ۱.۱ حاصل می‌شود. ■

۱.۴ گزاره. فرض کنید که \mathcal{M}_α توسط \mathcal{E}_α تولید شود که $\alpha \in A$. در این صورت $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ توسط گردایی زیر تولید می‌شود:

$$\mathcal{F}_1 = \{ \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha, \alpha \in A \}$$

اگر A شمارش پذیر باشد و برای همه α ها $X_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$ ، آنگاه $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ توسط

$$\mathcal{F}_1 = \{ \prod_{\alpha \in A} E_\alpha : E_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha \}$$

تولید می‌شود.

برهان. به وضوح $\mathcal{M}(\mathcal{F}_1) \subset \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$. از سوی دیگر به آسانی دیده می‌شود که به ازای هر α ، گردایی $\{ E \subset X_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_1) \}$ یک σ -جبر روی X_α است که شامل \mathcal{E}_α و در نتیجه شامل \mathcal{M}_α است. به بیان دیگر، به ازای هر $\alpha \in A$ ، $E \in \mathcal{M}_\alpha$ و $\pi_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$ و از این رو $\bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{M}(\mathcal{F}_1)$. حکم دوم مانند برهان گزاره ۱.۳ از اولی نتیجه می‌شود. ■

۱.۵ گزاره. فرض کنید X_1, \dots, X_n چند فضاهای متری باشند و $X = \prod_1^n X_j$ مجهز به متر حاصلضربی باشد. در این صورت $\bigotimes_1^n \mathcal{B}_{X_j} \subset \mathcal{B}_X$. اگر X_j ها جدایی پذیر باشند، آنگاه $\bigotimes_1^n \mathcal{B}_{X_j} = \mathcal{B}_X$.

برهان. بنابر گزاره ۱.۴، $\bigotimes_1^n \mathcal{B}_{X_j}$ توسط مجموعه‌های $\pi_j^{-1}(U_j)$ ($1 \leq j \leq n$) تولید می‌شود، که در آن U_j در X_j باز است. چون این مجموعه‌ها در X باز هستند، لم ۱.۱ ایجاب می‌کند که $\bigotimes_1^n \mathcal{B}_{X_j} \subset \mathcal{B}_X$. اکنون فرض کنید C_j مجموعه چگال شمارش پذیری در X_j باشد و \mathcal{E}_j گردایی همه گوی‌هایی در X_j باشد که شعاع هایشان گویا هستند و مراکزشان در C_j قرار دارند. در واقع، U_j اجتماع شمارش پذیری از آنها است زیرا خود \mathcal{E}_j شمارش پذیر است. به علاوه، مجموعه تقاطعی از X که زامین مؤلفه آنها در C_j ($1 \leq j \leq n$) است زیرمجموعه چگال شمارش پذیری از X است و گوی‌های با شعاع r در X درست حاصلضرب گوی‌های با شعاع r در X_j ها هستند. نتیجه می‌گیریم که \mathcal{B}_X توسط \mathcal{E}_j تولید می‌شود، لذا \mathcal{B}_X توسط $\{ \prod_1^n E_j : E_j \in \mathcal{E}_j \}$ تولید می‌شود. از این رو بنابر گزاره ۱.۴، $\mathcal{B}_X = \bigotimes_1^n \mathcal{B}_{X_j}$. ■

۱.۶ نتیجه. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \bigotimes_1^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

این بخش را با نتیجه‌ای که بعداً لازم می‌شود به پایان می‌رسانیم. گردایه \mathcal{E} از زیرمجموعه‌های X را یک خانواده مقدماتی گوئیم در صورتی که:

- $\emptyset \in \mathcal{E}$
- اگر $E, F \in \mathcal{E}$ ، آنگاه $E \cap F \in \mathcal{E}$
- اگر $E \in \mathcal{E}$ ، آنگاه E^c اجتماع متناهی مجزایی از اعضای \mathcal{E} باشد.

۱.۷ گزاره. اگر \mathcal{E} یک خانواده مقدماتی باشد، گردایه \mathcal{A} متشکل از اجتماع‌های مجزای متناهی از اعضای \mathcal{E} یک جبر است.

برهان. اگر $A, B \in \mathcal{E}$ و $B^c = \bigcup_j C_j$ (مجزا)، آنگاه
 $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$, $A \setminus B = \bigcup_j (A \cap C_j)$,

که در آن این اجتماع‌ها مجزا هستند، پس $A \setminus B \in \mathcal{A}$ و $A \cup B \in \mathcal{A}$. اکنون به استقرا نتیجه می‌شود که اگر $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ ، آنگاه $\bigcup_j^n A_j \in \mathcal{E}$ ؛ در واقع بنا بر فرض استقرا می‌توان A_1, \dots, A_{n-1} را مجزا گرفت و فرض کرد که $\bigcup_j^n A_j = A_n \cup [\bigcup_j^{n-1} (A_j \setminus A_n)]$ که اجتماعی مجزا است. برای دیدن اینکه \mathcal{A} تحت متمم‌گیری بسته است، فرض می‌کنیم $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ و $A_m^c = \bigcup_{j=1}^{J_m} B_m^j$ که $B_m^1, \dots, B_m^{J_m}$ اعضای مجزا از \mathcal{E} هستند. در این صورت:

$$\left(\bigcup_{m=1}^n A_m\right)^c = \bigcap_{m=1}^n \left(\bigcup_{j=1}^{J_m} B_m^j\right) = \bigcup \{B_1^{j_1} \cap \dots \cap B_n^{j_n} : 1 \leq j_m \leq J_m, 1 \leq m \leq n\},$$

که در \mathcal{A} است. ■

تمرین‌ها

(۱) خانواده‌ای ناتهی مانند $R \subset \mathcal{P}(X)$ از زیرمجموعه‌های X یک حلقه نامیده می‌شود هرگاه تحت اجتماع‌های متناهی و تقاضل بسته باشد (یعنی، اگر $E_1, \dots, E_n \in R$ ، آنگاه $\bigcup_j^n E_j \in R$ و اگر $E, F \in R$ ، آنگاه $E \setminus F \in R$). حلقه‌ای که تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر بسته باشد یک σ -حلقه نامیده می‌شود.

- (الف) حلقه‌ها (متناظراً، σ -حلقه‌ها) تحت اشتراک‌های متناهی (متناظراً، شمارش‌پذیر) بسته‌اند.
- (ب) اگر R یک حلقه (متناظراً، σ -حلقه) باشد، آنگاه R یک جبر (متناظراً، σ -جبر) است اگر و فقط اگر $X \in R$.
- (ج) اگر R یک σ -حلقه باشد، آنگاه {به ازای هر $E \in R$ یا $E^c \in R$ } یک σ -جبر است.
- (د) اگر R یک σ -حلقه باشد، آنگاه {به ازای هر $E \cap F \in R, F \in R$ } یک σ -جبر است.

(۳) فرض کنید \mathcal{M} یک σ -جبر نامتناهی است.

(الف) \mathcal{M} شامل دنباله‌ای نامتناهی از مجموعه‌های مجزا است.

(ب) $\text{card}(\mathcal{M}) \geq c$.

(۴) جبری چون \mathcal{A} یک σ -جبر است اگر و فقط اگر تحت اجتماع‌های صعودی شمارش‌پذیر بسته باشد (یعنی اگر

$$\{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{A} \text{ و } E_1 \subset E_2 \subset \dots, \text{ آنگاه } \bigcup_1^\infty E_j \in \mathcal{A}.$$

(۵) اگر \mathcal{M}, σ -جبر تولید شده با \mathcal{E} باشد، آنگاه \mathcal{M} اجتماع σ -جبرهای تولید شده با \mathcal{F} ‌هایی است که \mathcal{F} روی تمام زیر مجموعه‌های شمارش‌پذیر \mathcal{E} تغییر می‌کند. (راهنمایی: نشان دهید که شیء اخیر یک σ -جبر است).

۳. اندازه‌ها

فرض کنیم X مجموعه‌ای مجهز به یک σ -جبر مانند \mathcal{M} باشد. یک اندازه روی \mathcal{M} (یا روی (X, \mathcal{M}))، یا به طور خلاصه روی X در صورتی که \mathcal{M} معلوم باشد) تابعی چون $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ است به قسمی که

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad (\text{الف})$$

(ب) اگر $\{E_j\}_1^\infty$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در \mathcal{M} باشد، آنگاه

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty E_j\right) = \sum_1^\infty \mu(E_j).$$

خاصیت (ب) جمع‌ی شمارش‌پذیر نامیده می‌شود که جمع‌ی متناهی بودن را ایجاب می‌کند:

(ب۱) اگر E_1, \dots, E_n مجموعه‌هایی مجزا در \mathcal{M} باشند، آنگاه

$$\mu\left(\bigcup_1^n E_j\right) = \sum_1^n \mu(E_j),$$

زیرا برای $n > j$ می‌توان E_j را \emptyset گرفت. تابعی چون μ که در (الف) و (ب۱) صدق می‌کند اما لزوماً در (ب) صدق نمی‌کند، اندازه متناهی جمع‌پذیر نامیده می‌شود. چنانچه X یک مجموعه و $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ یک σ -جبر باشد، (X, \mathcal{M}) یک فضای اندازه‌پذیر نامیده می‌شود و مجموعه‌های واقع در \mathcal{M} ، مجموعه‌های اندازه‌پذیر نامیده می‌شوند. اگر μ یک اندازه روی (X, \mathcal{M}) باشد، آنگاه (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای اندازه‌پذیر نامیده می‌شود. فرض کنید (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای اندازه‌پذیر باشد. یک نمادگذاری استاندارد

در مورد «اندازه» μ وجود دارد، چنانچه $\mu(X) < \infty$ (و در نتیجه به ازای هر $E \in \mathcal{M}$ ، $\mu(E) < \infty$)

به ازای هر $E \in \mathcal{M}$ ، $\mu(E) < \infty$ و $\mu(X) = \mu(E) + \mu(E^c)$ اندازه μ متناهی نامیده می‌شود. اگر $X = \bigcup_1^\infty E_j$ که در آن $E_j \in \mathcal{M}$ ،

به ازای همه j ها برقرار باشد، μ را σ -متناهی نامیم. به طور کلی اگر $E = \bigcup_1^\infty E_j$ که در آن $E_j \in \mathcal{M}$ ،

به ازای هر j ، $\mu(E_j) < \infty$ ، مجموعه E نسبت به μ ، σ -متناهی خوانده می‌شود. (درست این است که بگوییم E

اندازه σ -متناهی است (چنانچه به ازای هر $E \in \mathcal{M}$ که $\mu(E) = \infty$ مجموعه‌ای چون $F \in \mathcal{M}$ موجود باشد که $F \subset E$ و $0 < \mu(F) < \infty$ نیمه متناهی نامیده می‌شود. هر اندازه σ -متناهی نیمه متناهی است (تمرین ۱۳)، اما عکس آن درست نیست.

اکثر اندازه‌هایی که در مسائل ظاهر می‌شوند σ -متناهی اند که خوش رفتار هستند در حالی که اندازه‌هایی که σ -متناهی نیستند منجر به رفتار نارسایی می‌شوند. خواص اندازه‌هایی که σ -متناهی نیستند به تدریج در تمرین‌ها مورد کنکاش قرار خواهند گرفت. اکنون چند مثال از اندازه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این مثال‌ها از طبیعت نسبتاً بدیهی برخوردارند، اولین مورد از اهمیت خاصی برخوردار است. ساختن مثال‌های جالبتر، کاری است که آن را به دو بخش بعدی موکول می‌کنیم.

• فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی باشد $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ و f تابعی از X به توی $[0, \infty]$ باشد. در این صورت با فرمول $\mu(E) = \sum_{x \in E} f(x)$ تابع f اندازه‌ای چون μ روی \mathcal{M} مشخص می‌کند. (برای تعریف چنین مجموع شمارش‌ناپذیر احتمالی، بند ۵.۰ را ببینید). خواننده می‌تواند بررسی کند که μ نیمه متناهی است اگر و فقط اگر به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $f(x) < \infty$ و μ یک اندازه σ -متناهی است اگر و فقط اگر μ نیمه متناهی و $\{x : f(x) > 0\}$ شمارش‌پذیر باشد. دو حالت خاص از مضمون ویژه‌ای برخوردارند: چنانچه به ازای هر x ، $f(x) = 1$ ، μ اندازه شمارشی نامیده می‌شود و اگر به ازای عضوی چون $x_0 \in X$ با $f(x_0) = 1$ و $f(x) = 0$ برای $x \neq x_0$ تعریف شود، μ جرم نقطه‌ای یا اندازه دیراک در x_0 نامیده می‌شود.

(برای تحدیدهای این اندازه‌ها به σ -جبرهای کوچکتر روی X نیز همین نام‌ها به کار می‌روند).

• فرض کنید X مجموعه‌ای شمارش‌ناپذیر باشد و \mathcal{M} ، σ -جبری باشد که از مجموعه‌هایی تشکیل می‌شود که یا خود شمارش‌پذیرند یا متممشان شمارش‌پذیر است. به آسانی دیده می‌شود که تابع μ که با $\mu(E) = 0$ هرگاه E شمارش‌پذیر باشد و $\mu(E) = 1$ هرگاه E^c شمارش‌پذیر باشد یک اندازه است.

• فرض کنید X مجموعه‌ای نامتناهی باشد و $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. تعریف کنید $\mu(E) = 0$ هرگاه E متناهی باشد و $\mu(E) = \infty$ هرگاه E نامتناهی باشد. در این صورت μ یک اندازه جمعی متناهی است اما یک اندازه نیست. خواص اساسی اندازه‌ها در قضیه زیر گنجانده شده است.

۱.۸ قضیه. فرض کنیم (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای اندازه باشد.

(الف) (یکنوایی) اگر $E, F \in \mathcal{M}$ و $E \subset F$ ، آنگاه $\mu(E) \leq \mu(F)$.

(ب) (زیرجمعی بودن) اگر $\{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{M}$ ، آنگاه $\mu(\bigcup_1^\infty E_j) \leq \sum_1^\infty \mu(E_j)$.

(ج) (پیوستگی از پائین) اگر $\{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{M}$ و $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ ، آنگاه

$$\mu(\bigcup_1^\infty E_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j).$$

(د) (پيوستگی از بالا) اگر $\{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{M}$ و $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ و $\mu(E_1) < \infty$ ، آنگاه

$$\mu(\bigcap_{j=1}^\infty E_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j).$$

برهان. (الف) اگر $E \subset F$ ، آنگاه

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E).$$

(ب) فرض کنیم $F_1 = E_1$ و $F_k = E_k \setminus (\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j)$ برای $k > 1$. در این صورت F_k ها مجزا هستند و

$\bigcup_{j=1}^n F_j = \bigcup_{j=1}^n E_j$ به ازای همه n ها برقرار است. بنابر این طبق (الف) خواهیم داشت:

$$\mu(\bigcup_{j=1}^\infty E_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^\infty F_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu(F_j) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(E_j).$$

(ج) با قرار دادن $E_0 = \emptyset$ ، داریم

$$\mu(\bigcup_{j=1}^\infty E_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu(E_j \setminus E_{j-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(E_j \setminus E_{j-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

(د) فرض کنید $F_j = E_1 \setminus E_j$ ؛ در این صورت $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ و $\bigcup_{j=1}^\infty F_j = E_1 \setminus (\bigcap_{j=1}^\infty E_j)$.

$$\mu(E_1) = \mu(F_j) + \mu(E_j).$$

در نتیجه بنابر (ج) خواهیم داشت:

$$\mu(E_1) = \mu(\bigcap_{j=1}^\infty E_j) + \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(F_j) = \mu(\bigcap_{j=1}^\infty E_j) + \lim_{j \rightarrow \infty} [\mu(E_1) - \mu(E_j)].$$

چون $\mu(E_1) < \infty$ ، پس می‌توانیم آن را از دو طرف کم کرده و به نتیجه مطلوب برسیم. ■

تذکرمی‌دهیم که شرط $\mu(E_1) < \infty$ در قسمت (د) را می‌توان با $\mu(E_n) < \infty$ به ازای $n > 1$ ای، جایگزین کرد، زیرا

نخستین $n - 1$ تا از E_j ها را می‌توان از دنباله حذف کرد بدون آنکه بر اشتراک تأثیر گذارد. اما فرض متناهی بودن اندازه یکی از

E_j ها امری ضروری است زیرا ممکن است که $\mu(E_j) = \infty$ به ازای هر j برقرار باشد اما $\mu(\bigcap_{j=1}^\infty E_j) < \infty$ (برای

مثال، فرض می‌کنیم μ اندازه شمارشی روی $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ باشد و قرار می‌دهیم $E_j = \{n : n \geq j\}$ ؛ در این صورت

$$(\bigcap_{j=1}^\infty E_j) = \emptyset$$

چنانچه (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای اندازه باشد، مجموعه‌ای چون $E \in \mathcal{M}$ به طوری که $\mu(E) = 0$ یک مجموعه پوچ نامیده می‌شود. بنابر زیرجمعی بودن، هر اجتماع شمارش پذیر از مجموعه‌های پوچ یک مجموعه پوچ است، و این واقعیتی است

که بارها از آن استفاده خواهیم کرد.

چنانچه گزاره‌ای در مورد نقاط $x \in X$ به جز x های واقع در یک مجموعه پوچ درست باشد، می‌گوییم که این گزاره تقریباً

همه جا (به طور خلاصه μ) درست است یا به ازای تقریباً هر x درست است. (اگر دقت بیشتری لازم باشد، خواهیم گفت که

مجموعه μ - پوچ یا μ - تقریباً همه جا پوچ است).

اگر $\mu(E) = 0$ و $F \subset E$ ، آنگاه بنا بر یکنوایی داریم $\mu(F) = 0$ مشروط بر اینکه $F \in \mathcal{M}$ ، اما در کل لازم نیست که $F \in \mathcal{M}$ برقرار باشد. اندازه‌های که دامنه‌اش همه زیر مجموعه‌های مجموعه‌های پوچ را شامل شود کامل نامیده می‌شود. اغلب می‌توان با نکات تکنیکی معضل کامل نبودن را مرتفع ساخت و همواره با توسعه دامنه μ به صورت زیر می‌توان این کار را انجام داد.

۱.۹ قضیه. فرض کنید (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای اندازه باشد. قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M} : \mu(N) = 0\},$$

$$\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{M}, F \subset N, \text{ای } N \in \mathcal{N}\}.$$

در این صورت $\overline{\mathcal{M}}$ یک σ -جبر است و توسعه یکتایی چون $\overline{\mu}$ از μ به اندازه‌های کامل روی $\overline{\mathcal{M}}$ وجود دارد.

برهان. چون \mathcal{M} و \mathcal{N} تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر بسته‌اند پس $\overline{\mathcal{M}}$ نیز چنین است. اگر $E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$ که در آن $E \in \mathcal{M}$ و $F \subset N \in \mathcal{N}$ ، می‌توانیم فرض کنیم که $E \cap N = \emptyset$ (در غیر این صورت N را با F و $N \setminus E$ عوض می‌کنیم). در این صورت $E \cup F = (E \cup N) \cap (N^c \cup F)$ ، لذا $(E \cup F)^c = (E \cup N)^c \cup (N \setminus F)$ ، اما $(E \cup N)^c \in \mathcal{M}$ و $N \setminus F \subset N$ ، پس $(E \cup F)^c \in \overline{\mathcal{M}}$. از این رو $\overline{\mathcal{M}}$ یک σ -جبر است.

چنانچه $E \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$ مانند فوق باشد، قرار می‌دهیم $\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$. این نگاهت خوشتعریف است، زیرا اگر $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$ و $E_1 \subset N_1 \in \mathcal{N}$ ، آنگاه $F_1 \subset N_1 \in \mathcal{N}$ و $E_2 \subset E_1 \cup N_1$ و لذا $\mu(E_1) \leq \mu(E_2) + \mu(N_1) = \mu(E_2)$.

مشابهاً $\mu(E_2) \leq \mu(E_1)$ به آسانی معلوم می‌شود که $\overline{\mu}$ اندازه‌های کامل روی $\overline{\mathcal{M}}$ است و $\overline{\mu}$ تنها اندازه‌های روی $\overline{\mathcal{M}}$ است که μ را توسعه می‌دهد؛ جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم (تمرین ۶). ■

اندازه $\overline{\mu}$ در قضیه ۱.۹ کامل شده μ و $\overline{\mathcal{M}}$ کامل شده \mathcal{M} نسبت به μ نامیده می‌شود.

تمرین‌ها

۶) برهان قضیه ۱.۹ را کامل کنید.

۷) اگر μ_1, \dots, μ_n اندازه‌هایی روی (X, \mathcal{M}) باشند و $a_1, \dots, a_n \in [0, \infty)$ ، آنگاه $\sum_{j=1}^n a_j \mu_j$ اندازه‌های روی (X, \mathcal{M}) است.

۸) اگر (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای اندازه باشد و $\{E_j\}_1^\infty \subset \mathcal{M}$ ، آنگاه

$$\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j).$$

همچنین

$$\mu(\limsup E_j) \geq \limsup \mu(E_j).$$

مشروط بر اینکه $\mu(\bigcup_1^\infty E_j) < \infty$.

۹) اگر (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای اندازه باشد و $E, F \in \mathcal{M}$ ، آنگاه

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

۱۰) فضای اندازه‌ای چون (X, \mathcal{M}, μ) و $E \in \mathcal{M}$ مفروض‌اند، به ازای هر $A \in \mathcal{M}$ تعریف می‌کنیم:

$$\mu_E(A) = \mu(A \cap E).$$

در این صورت μ_E یک اندازه است.

۱۱) یک اندازهٔ جمعی متناهی مانند μ یک اندازه است اگر و فقط اگر مانند قسمت (ج) از قضیه ۱.۸ از پایین پیوسته باشد. چنانچه $\mu(X) < \infty$ ، μ یک اندازه است اگر و فقط اگر مانند (د) از قضیه ۱.۸ از بالا پیوسته باشد.

۱۲) فرض کنیم (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای اندازه باشد.

الف) اگر $E, F \in \mathcal{M}$ و $\mu(E \Delta F) = 0$ ، آنگاه $\mu(E) = \mu(F)$.

ب) می‌گوییم $E \sim F$ هرگاه $\mu(E \Delta F) = 0$ ؛ در این صورت \sim یک رابطهٔ هم‌ارزی روی \mathcal{M} است.

ج) به ازای $E, F \in \mathcal{M}$ تعریف می‌کنیم $\rho(E, F) = \mu(E \Delta F)$. در این صورت

$$\rho(E, G) \leq \rho(E, F) + \rho(F, G),$$

از این رو ρ یک متر روی فضای \mathcal{M} / \sim متشکل از رده‌های هم‌ارزی تعریف می‌کند.

۱۳) هر اندازهٔ σ -متناهی، نیمه متناهی است.

۱۴) اگر μ یک اندازهٔ نیمه متناهی باشد $\mu(E) = \infty$ ، به ازای هر $C > 0$ ، $F \subset E$ ای وجود دارد که

$$C < \mu(F) < \infty.$$

۱۵) اندازه‌ای چون μ روی (X, \mathcal{M}) مفروض است، μ_0 روی \mathcal{M} را با

$$\mu_0(E) = \sup \{ \mu(F) : F \subset E, \mu(F) < \infty \}.$$

تعریف می‌کنیم.

(الف) μ_0 یک اندازه نیمه متناهی است. آن را بخش نیمه متناهی μ می‌نامیم.

(ب) اگر μ نیمه متناهی باشد، آنگاه $\mu_0 = \mu$. (از تمرین ۱۴ استفاده کنید).

(ج) اندازه‌ای چون ν روی \mathcal{M} (در کل، غیریکتا) وجود دارد که فقط مقادیر ۰ و ∞ را می‌گیرد به طوری که $\mu = \mu_0 + \nu$.

۱۶) فرض کنید (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای اندازه باشد. مجموعه‌ای چون $E \subset X$ اندازه‌پذیر موضعی نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $A \in \mathcal{M}$ با شرط $\mu(A) < \infty$ داشته باشیم $E \cap A \in \mathcal{M}$. فرض کنید $\tilde{\mathcal{M}}$ گردایه همه مجموعه‌های اندازه‌پذیر موضعی باشد. به وضوح $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$ ، اگر $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$ ، آنگاه μ اشباع نامیده می‌شود.

(الف) اگر μ, σ -متناهی باشد، آنگاه μ اشباع است.

(ب) $\tilde{\mathcal{M}}$ یک σ -جبر است.

(ج) $\tilde{\mu}$ را روی $\tilde{\mathcal{M}}$ چنین تعریف کنید: $\tilde{\mu}(E) = \mu(E)$ هرگاه $E \in \mathcal{M}$ و در غیر این صورت $\tilde{\mu}(E) = \infty$. در این

صورت $\tilde{\mu}$ یک اندازه اشباع روی $\tilde{\mathcal{M}}$ موسوم به اشباع شده μ است.

(د) اگر μ کامل باشد $\tilde{\mu}$ نیز چنین است.

(ه) فرض کنید μ نیمه متناهی باشد. به ازای $E \in \tilde{\mathcal{M}}$ ، تعریف کنید:

$$\underline{\mu}(E) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{M}, A \subset E\}.$$

در این صورت $\underline{\mu}$ یک اندازه اشباع روی $\tilde{\mathcal{M}}$ است که μ را توسعه می‌دهد.

(و) فرض کنید X_1, X_2 دو مجموعه شمارش‌ناپذیر مجزا باشند، $X = X_1 \cup X_2$ و σ -جبر مجموعه‌های

شمارش‌پذیر یا متمم شمارش‌پذیر واقع در X باشند. فرض کنید $\tilde{\mu}_0$ اندازه شمارشی روی $\mathcal{P}(X_1)$ باشد و μ را روی \mathcal{M} با

$\mu(E) = \mu_0(E \cap X_1)$ تعریف کنید. در این صورت μ یک اندازه روی \mathcal{M} است، $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{P}(X)$ و با نمادگذاری

قسمت‌های (ج) و (ه)، $\tilde{\mu} \neq \underline{\mu}$.

۱.۴ اندازه‌های خارجی

در این بخش ابزارهای مورد نیاز برای ساختن اندازه‌ها را توسعه می‌دهیم. برای به کار انداختن مؤثر ایده‌ها، روند به کار رفته در

حسابان برای تعریف مساحت ناحیه کرانداري چون E در صفحه \mathbb{R}^2 را به خاطر می‌آوریم. شبکه‌ای از مستطیل‌ها را در صفحه

رسم کرده و مساحت E را از پائین با مجموع مساحت‌های مستطیل‌هایی در شبکه که زیر مجموعه‌هایی از E هستند و از بالا با

مجموع مساحت‌های مستطیل‌هایی در شبکه که E را قطع می‌کنند تقریب می‌زنیم. حد این تقریب‌ها وقتی شبکه ظریف و

ظریفت می شود « مساحت داخلی » و « مساحت خارجی » E را به دست می دهد و اگر این دو مساحت برابر باشند، مقدار مشترکشان « مساحت » E است. (در این مورد برای جزئیات بیشتر در بند ۲.۶ بحث خواهیم کرد).
 نظر اصلی در اینجا مساحت خارجی است، زیرا اگر R یک مستطیل بزرگ شامل E باشد، مساحت داخلی E درست مساحت R منهای مساحت خارجی $E \setminus R$ است. تعمیم مفهوم مساحت خارجی به صورت زیر است. یک اندازه خارجی روی مجموعه ای ناتهی مانند X تابعی مانند $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ است که در شرایط زیر صدق می کند:

$$\mu^*(\emptyset) = 0$$

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) \text{ , اگر } A \subset B$$

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

رایج ترین روش برای به دست آوردن اندازه های خارجی، شروع کردن با خانواده ای چون \mathcal{E} از « مجموعه های مقدماتی » است که مفهومی از اندازه روی آنها تعریف شود (از قبیل مستطیل های واقع در صفحه) و سپس تقریب زدن مجموعه های دل خواه « از بیرون » با اجتماع شمارش پذیری از اعضای \mathcal{E} است.

۱.۱۰ گزاره. فرض کنید $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ و $\rho : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ به گونه ای باشد که $\emptyset \in \mathcal{E}$ و $\rho(\emptyset) = 0$ به ازای هر $A \subset X$ تعریف کنید:

$$\mu^*(A) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i) : E_i \in \mathcal{E}, A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \}$$

در این صورت μ^* یک اندازه خارجی است.

برهان. به ازای هر $A \subset X$ دنباله ای چون $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ وجود دارد به طوری که $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ (به ازای هر j فرض می کنیم $E_j = X$) پس تعریف μ^* با معنی است. به وضوح $\mu^*(\emptyset) = 0$ (به ازای هر j فرض می کنیم $E_j = X$) و به ازای هر $A \subset B$ داریم $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ زیرا در تعریف $\mu^*(A)$ مجموعه ای که روی آن اینفیم گرفته می شود شامل مجموعه متناظر در تعریف $\mu^*(B)$ است. برای اثبات زیرجمعی شمارش پذیر بودن، فرض می کنیم $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)$ و $\varepsilon > 0$. برای هر j دنباله ای چون $\{E_j^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ وجود دارد به طوری که $A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_j^k$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \mu^*(A_j) + 2^{-j} \varepsilon$$

اما در این صورت اگر $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ داریم $A \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} E_j^k$ و

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \sum_j \mu^*(A_j) + \varepsilon$$

که از آنجا

$$\mu^*(A) \leq \sum_j \mu^*(A_j) + \varepsilon$$

چون E دل‌خواه است به حکم می‌رسیم. ■

مرحلهٔ اساسی که منجر به رسیدن از اندازه‌های خارجی به اندازه‌ها می‌شود به صورت زیر است: چنانچه μ^* یک اندازهٔ خارجی روی X باشد، مجموعه‌ای چون $A \subset X$ ، μ^* - اندازه‌پذیر نامیده می‌شود هر گاه به ازای هر $E \subset X$ داشته باشیم:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

البته، نامساوی

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

برای هر A و E برقرار است، لذا برای اثبات μ^* - اندازه‌پذیری A ، کافی است عکس نامساوی را ثابت کنیم. اگر $\mu^*(E) = \infty$ چیزی برای اثبات نمی‌ماند، پس می‌بینیم که A ، μ^* - اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $E \subset X$ که $\mu^*(E) < \infty$ داشته باشیم:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

با رجوع به بحث آغازین همین بخش می‌توان نکاتی را در مورد مفهوم μ^* - اندازه‌پذیری به دست آورد. چنانچه E یک مجموعهٔ «خوش رفتار» باشد به قسمی که $E \supset A$ ، معادلهٔ

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

می‌گوید که اندازهٔ خارجی A ، یعنی $\mu^*(A)$ با «اندازهٔ داخلی» A ، یعنی $\mu^*(E) - \mu^*(E \cap A^c)$ برابر است. گذر از مجموعه‌های «خوش رفتار» شامل A به زیرمجموعه‌های دل‌خواه X کار بزرگی است، اما بنابر قضیهٔ زیر، این کار قابل انجام است.

۱.۱۱ قضیهٔ کاراتئودری. اگر μ^* یک اندازهٔ خارجی روی X باشد، گردایهٔ \mathcal{M} مرکب از مجموعه‌های μ^* - اندازه‌پذیر یک σ - جبر است، و تحدید μ^* به \mathcal{M} یک اندازهٔ کامل است.

برهان. نخست ملاحظه می‌کنیم که \mathcal{M} تحت متمم‌گیری بسته است زیرا تعریف μ^* اندازه‌پذیری A نسبت به A^c ، متقارن است. اکنون اگر $A, B \in \mathcal{M}$ و $E \subset X$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) \end{aligned}$$

اما $(A \cup B) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ ، لذا بنابر زیرجمعی بودن

$$\mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)),$$

و از این رو

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c).$$

نتیجه می‌گیریم که $A \cup B \in \mathcal{M}$ پس \mathcal{M} یک جبر است. به علاوه، اگر $A, B \in \mathcal{M}$ و $A \cap B = \emptyset$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cup B) &= \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) \\ &= \mu^*(A) + \mu^*(B), \end{aligned}$$

لذا μ^* روی \mathcal{M} جمعی متناهی است.

برای نشان دادن اینکه \mathcal{M} یک σ -جبر است، کافی است نشان دهیم که \mathcal{M} تحت اجتماع‌های مجزای شمارا بسته است.

اگر $\{A_j\}_1^\infty$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزای واقع در \mathcal{M} باشد، قرار می‌دهیم $B_n = \bigcup_1^n A_j$ و $B = \bigcup_1^\infty A_j$. در این صورت به ازای هر $E \subset X$ داریم:

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap B_n) &= \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) \\ &= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}), \end{aligned}$$

لذا یک استقرای ساده نشان می‌دهد که $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_1^n \mu^*(E \cap A_j)$. بنا بر این

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_1^n \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B_n^c),$$

و با فرض $n \rightarrow \infty$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \sum_1^\infty \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B_n^c) \\ &\geq \mu^*(\bigcup_1^\infty (E \cap A_j)) + \mu^*(E \cap B_n^c) \\ &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \mu^*(E). \end{aligned}$$

بنا بر این، در آخرین استنتاج همه نامساوی‌ها تساوی هستند. نتیجه می‌گیریم که $B \in \mathcal{M}$ و با گرفتن « $E = B$ »

$\mu^*(B) = \sum_1^\infty \mu^*(A_j)$ ، لذا μ^* روی \mathcal{M} جمعی شمارش‌پذیر است. بالاخره، چنانچه به ازای هر $E \subset X$ داشته باشیم

$$\mu^*(A) = 0 \text{ آنگاه}$$

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E),$$

و لذا $A \in \mathcal{M}$ بنا بر این $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ یک اندازه کامل است. ■

نخستین کاربردهای قضیه کاراتودوی در زمینه توسعه اندازه‌ها از جبرها به σ -جبرها خواهد بود. به طور دقیق‌تر، چنانچه

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ یک جبر باشد، تابعی چون $\mu_0: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ را یک پیش‌اندازه خواهیم نامید در صورتی که

$$\mu_0(\emptyset) = 0 \quad \bullet$$

اگر $\{A_j\}_1^\infty$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزای واقع در \mathcal{A} باشد که $\bigcup_1^\infty A_j \in \mathcal{A}$ ، آنگاه

$$\mu_0(\bigcup_1^\infty A_j) = \sum_1^\infty \mu_0(A_j)$$

به‌ویژه، هر پیش‌اندازه جمعی متناهی است زیرا می‌توان برای \mathcal{A} بزرگ \emptyset را گرفت. پیش‌اندازه‌های متناهی و σ -متناهی درست مانند اندازه‌ها تعریف می‌شوند. چنانچه μ_0 پیش‌اندازه‌ای روی $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ باشد از گزاره ۱.۱۰ معلوم می‌شود که μ_0 یک اندازه خارجی روی X القاء می‌کند که عبارت است از:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_1^\infty \mu_0(A_j) : A_j \in \mathcal{A}, E \subset \bigcup_1^\infty A_j \right\}. \quad (۱.۱۲)$$

۱.۱۳ گزاره. اگر μ_0 یک پیش‌اندازه روی \mathcal{A} باشد و μ^* با (۱.۱۲) تعریف شود، آنگاه

(الف) $\mu_0|_{\mathcal{A}} = \mu^*$;

(ب) هر مجموعه در \mathcal{A} ، μ^* -اندازه‌پذیر است.

برهان. (الف) فرض کنید $E \in \mathcal{A}$. چنانچه $E \subset \bigcup_1^\infty A_j$ که \mathcal{A} قرار می‌دهیم:

$$B_n = E \cap (A_n \setminus \bigcup_1^{n-1} A_j).$$

در این صورت B_n ها اعضای مجزایی از \mathcal{A} هستند که اجتماعشان E است، لذا

$$\mu_0(E) = \sum_1^\infty \mu_0(B_j) \leq \sum_1^\infty \mu_0(A_j).$$

نتیجه می‌گیریم که $\mu_0(E) \leq \mu^*(E)$ و نامساوی عکس واضح است زیرا $E \subset \bigcup_1^\infty A_j$ که در آن $A_1 = E$ و به ازای $A_j = \emptyset$ ، $j > 1$.

(ب) چنانچه $A \in \mathcal{A}$ ، $E \subset X$ و $\varepsilon > 0$ دنباله‌ای چون $\{B_j\}_1^\infty \subset \mathcal{A}$ وجود دارد به‌طوری که $E \subset \bigcup_1^\infty B_j$ و

$$\sum_1^\infty \mu_0(B_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$$

چون \mathcal{A} جمعی است پس

$$\mu^*(E) + \varepsilon \geq \sum_1^\infty \mu_0(B_j \cap A) + \sum_1^\infty \mu_0(B_j \cap A^c) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

چون ε دل‌خواه است، A مجموعه‌ای μ^* -اندازه‌پذیر است. ■

۱.۱۴ قضیه. فرض کنید $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ یک جبر، μ_0 یک پیش‌اندازه روی \mathcal{A} و σ -جبر تولید شده به‌وسیله \mathcal{A}

باشد. اندازه‌ای چون μ روی \mathcal{M} موجود است که تحدیدش به \mathcal{A} ، μ_0 می‌باشد یعنی، $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$ که در آن μ^* به‌وسیله

(۱.۱۲) تعریف می‌شود. اگر ν اندازه دیگری روی \mathcal{M} باشد که μ_0 را توسعه دهد، آنگاه به ازای هر $E \in \mathcal{M}$ ،

$\nu(E) \leq \mu(E)$ که مساوی است وقتی $\mu(E) < \infty$. اگر μ_0 ، σ -متناهی باشد، آنگاه μ توسعه یکتایی از μ_0 به یک

اندازه روی \mathcal{M} است.

برهان. حکم نخست از قضیه کاراتئودری و گزاره ۱.۱۳ حاصل می‌شود زیرا σ -جبر مجموعه‌های μ^* -اندازه‌پذیر شامل

\mathcal{A} و در نتیجه شامل \mathcal{M} است. در مورد حکم دوم، اگر $E \in \mathcal{M}$ و $E \subset \bigcup_1^\infty A_j$ که در آن $A_j \in \mathcal{A}$ ، آنگاه

$$\nu(E) \leq \sum_1^\infty \nu(A_j) = \sum_1^\infty \mu_0(A_j),$$

که از آنجا $\nu(E) \leq \mu(E)$ به دست می‌آید. همچنین اگر قرار دهیم $A = \bigcup_1^\infty A_j$ ، آنگاه

$$\nu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\bigcup_1^n A_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\bigcup_1^n A_j) = \mu(A).$$

چنانچه $\mu(E) < \infty$ ، می‌توانیم A_j ها را طوری انتخاب کنیم که $\mu(A) < \mu(E) + \varepsilon$ و بنابر این $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$ و

$$\mu(E) \leq \mu(A) = \nu(A) = \nu(E) + \nu(A \setminus E) \leq \nu(E) + \mu(A \setminus E) \nu(E) + \varepsilon.$$

چون ε دل‌خواه است، $\mu(E) = \nu(E)$. بالاخره، فرض کنید $X = \bigcup_1^\infty A_j$ و $\mu_0(A_j) < \infty$ که در آن می‌توانیم

A_j ها را مجزا فرض کنیم. در این صورت به ازای هر $E \in \mathcal{M}$ داریم

$$\mu(E) = \sum_1^\infty \mu(E \cap A_j) = \sum_1^\infty \nu(E \cap A_j) = \nu(E).$$

پس $\nu = \mu$. ■

برهان این قضیه چیزی بیشتر از حکم به دست می‌دهد. در حقیقت، μ_0 را می‌توان به یک اندازه روی جبر \mathcal{M}^* متشکل از

مجموعه‌های μ^* - اندازه‌پذیر توسعه داد.

رابطه بین \mathcal{M} و \mathcal{M}^* در تمرین ۲۲ مورد کنکاش قرار می‌گیرد (همراه با قسمت (ب) از تمرین ۲۰ که حکم می‌کند که اندازه‌های

خارجی القاء شده μ_0 و μ یکی هستند).

تمرین‌ها

(۱۷) اگر μ^* یک اندازه خارجی روی X باشد و $\{A_j\}_1^\infty$ دنباله‌ای از مجموعه‌های μ^* - اندازه‌پذیر مجزا باشد، آنگاه به ازای هر

$$E \subset X$$

$$\mu^*(E \cap (\bigcup_1^\infty A_j)) = \sum_1^\infty \mu^*(E \cap A_j).$$

(۱۸) فرض کنید $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ یک جبر، A_0 گردایی اجتماع‌های شمارش‌پذیر از مجموعه‌های واقع در \mathcal{A} و \mathcal{A}_{00} گردایی

اشتراک‌های شمارش‌پذیر از مجموعه‌های واقع در A_0 باشد. فرض کنید μ_0 یک پیش‌اندازه روی \mathcal{A} و μ^* اندازه خارجی القایی باشد.

(الف) به ازای هر $E \subset X$ و $\varepsilon > 0$ عضو \mathcal{A}_{00} وجود دارد که $E \subset \mathcal{A}$ و $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$.

(ب) اگر $\mu^*(E) < \infty$ ، آنگاه E ، μ^* - اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر عضوی چون $B \in \mathcal{A}_{00}$ موجود باشد که $E \subset B$ و

$$\mu^*(B \setminus E) = 0.$$

(ج) اگر μ_0 ، σ - متناهی باشد، قید $\mu^*(E) < \infty$ در (ب) زاید است.

۱۹) فرض کنید μ^* یک اندازه خارجی روی X باشد که از پیش‌اندازه‌های متناهی مانند μ_0 القاء شده باشد. اگر $E \subset X$ ، اندازه داخلی E را $\mu_*(E) = \mu_0(X) - \mu^*(E^c)$ تعریف کنید. در این صورت E ، μ^* - اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر $\mu_*(E) = \mu^*(E)$. (از تمرین ۱۸ استفاده کنید).

۲۰) فرض کنید μ^* یک اندازه خارجی روی X باشد، σ - جبر مجموعه‌های μ^* - اندازه‌پذیر، \mathcal{M}^* باشد. اندازه خارجی القاء شده توسط $\bar{\mu}$ همچون (۱.۱۲) (با جایگزینی \mathcal{M}^* به جای \mathcal{M} و μ_0 با μ^*) باشد. الف) اگر $E \subset X$ ، داریم $\mu^*(E) \leq \mu^+(E)$ و تساوی است اگر و فقط اگر عضوی چون $A \in \mathcal{M}^*$ موجود باشد که $A \supset E$ و $\mu^*(A) = \mu^*(E)$. ب) اگر μ^* از پیش‌اندازه القاء شده باشد، آنگاه $\mu^+ = \mu^*$. (تمرین ۱۸ الف را به کار برید). ج) اگر $X = \{0, 1\}$ ، یک اندازه خارجی مانند μ^* روی X وجود دارد به قسمی که $\mu^* \neq \mu^+$.

۲۱) فرض کنید μ^* یک اندازه خارجی باشد که از یک پیش‌اندازه القاء شده است و $\bar{\mu}$ تحدید μ^* به مجموعه‌های μ^* - اندازه‌پذیر باشد. در این صورت $\bar{\mu}$ اشباع است (تمرین ۱۸ را به کار برید).

۲۲) فرض کنید (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای اندازه، μ^* اندازه خارجی القاء شده توسط μ مطابق با (۱.۱۲)، \mathcal{M}^* ، σ - جبر متشکل از مجموعه‌های μ^* - اندازه‌پذیر، و $\bar{\mu} = \mu^*$ | \mathcal{M}^* باشد. الف) اگر μ_0 ، σ - متناهی باشد، آنگاه $\bar{\mu}$ کامل شده μ است (از تمرین ۱۸ استفاده کنید). ب) در کل، $\bar{\mu}$ اشباع کامل شده μ است. (تمرین‌های ۱۶ و ۲۱ را ببینید).

۲۳) فرض کنید \mathcal{A} گردایه اجتماع‌های متناهی از مجموعه‌های به شکل $\mathbb{Q} \cap (a, b)$ باشد که در آن $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

الف) \mathcal{A} یک جبر روی \mathbb{Q} است. (از گزاره ۱.۷ استفاده کنید).
 ب) σ - جبر تولید شده به وسیله \mathcal{A} عبارت است از $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.
 ج) μ_0 را روی \mathcal{A} با $\mu_0(\emptyset) = 0$ و $\mu_0(A) = \infty$ به ازای $A \neq \emptyset$ تعریف کنید. در این صورت μ_0 یک پیش‌اندازه روی \mathcal{A} است و بیش از یک اندازه روی $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ وجود دارد که تحدیدشان به \mathcal{A} ، μ_0 است.

۲۴) فرض کنید μ یک اندازه متناهی روی (X, \mathcal{M}) و μ^* اندازه خارجی القایی توسط μ باشد. فرض کنید که $E \subset X$ در $\mu^*(E) = \mu^*(X)$ صدق می‌کند (اما نه در $E \in \mathcal{M}$). الف) اگر $A, B \in \mathcal{M}$ و $A \cap E = B \cap E$ ، آنگاه $\mu(A) = \mu(B)$.

ب) فرض کنید $\mathcal{M}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{M}\}$ ، و تابع ν روی \mathcal{M}_E را با $\nu(A \cap E) = \mu(A)$ تعریف کنید (که بنابر الف) با معنی است). در این صورت \mathcal{M}_E یک σ -جبر روی E است و ν یک اندازه روی \mathcal{M}_E می‌باشد.

۱.۵ اندازه‌های برل روی خط حقیقی

اکنون در آستانه ساختن یک نظریه توصیفی در مورد زیرمجموعه‌های اندازه‌های \mathbb{R} هستیم که بر ایده‌ای استوار است که اندازه یک بازه، طول آن باشد. با یک کلیت ساختن (اما فقط کمی پیچیده‌تر) شروع می‌کنیم که خانواده‌ای بزرگ از اندازه‌ها روی \mathbb{R} را به دست می‌دهد که دامنه آنها σ -جبر برل $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ است؛ چنین اندازه‌هایی اندازه‌های برل روی \mathbb{R} نامیده می‌شوند. برای اجرای ایده‌ها، فرض کنید که μ یک اندازه برل متناهی روی \mathbb{R} باشد و $F(x) = \mu((-\infty, x])$. (اغلب F تابع توزیع μ نامیده می‌شود). در این صورت بنابر قسمت الف) از قضیه ۱.۸، تابع F صعودی است و بنابر د) از قضیه ۱.۸ از راست پیوسته است زیرا وقتی $x_n > x$ داریم:

$$(-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n].$$

(بحث صعودی بودن توابع در بند ۰.۵ را به خاطر آورید.) به علاوه، اگر $b > a$ ، آنگاه

$$(-\infty, b] = (-\infty, a] \cup (a, b]$$

و لذا

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a).$$

هدفمان برگرداندن این موضوع و ساختن اندازه‌های μ با شروع از یک تابع صعودی از راست پیوسته مانند F است. حالت خاص $F(x) = x$ اندازه «طول» معمولی را به دست خواهد داد.

بلوک‌های ساختمانی نظریه ما بازه‌های از چپ باز و از راست بسته در \mathbb{R} خواهند بود، یعنی، مجموعه‌هایی به شکل $(a, b]$ یا (a, ∞) یا \emptyset که در آن $-\infty \leq a < b < \infty$.

در این بخش از چنین بازه‌هایی تحت عنوان نیم بازه‌ها یاد خواهیم کرد (نیم برای نیم باز است).

به وضوح، اشتراک دو نیم بازه، یک نیم بازه است، و متمم یک نیم بازه یک نیم بازه یا اجتماعی مجزا از دو نیم بازه است. بنابر گزاره ۱.۷ گردایه \mathcal{A} متشکل از اجتماع‌های مجزای متناهی از نیم بازه‌ها، یک جبر است، و بنابر گزاره ۱.۲، σ -جبر تولید شده با \mathcal{A} درست $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ است.

۱.۱۵ گزاره. فرض کنیم $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ صعودی و از راست پیوسته باشد. اگر $(a_j, b_j]$ ($j = 1, \dots, n$)، نیم بازه‌هایی مجزا باشند، قرار می‌دهیم:

$$\mu_0(\bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j]) = \sum_{j=1}^n [F(b_j) - F(a_j)],$$

فرض کنید μ_0 یک پیش اندازه روی جبر \mathcal{A} است.

برهان. نخست باید خوشتعریفی μ_0 را بررسی کنیم، زیرا اعضای \mathcal{A} را می‌توان به بیش از یک صورت اجتماع‌های مجزا از نیم بازها نمایش داد. اگر اعضای $\{(a_j, b_j)\}_1^n$ مجزا باشند و $[a_j, b_j] = (a, b]$ ، آنگاه در صورت لزوم پس از اندیس‌گذاری مجدد J باید داشته باشیم $b = b_n < b_{n-1} < \dots < b_1 < a_1 = a$ ، لذا

$$\sum_1^n [F(b_j) - F(a_j)] = F(b) - F(a).$$

به‌طور کلی‌تر، اگر $\{I_i\}_1^n$ و $\{J_j\}_1^m$ دنباله‌هایی متناهی از نیم بازه‌هایی مجزا باشند به گونه‌ای که $\bigcup_1^n I_i = \bigcup_1^m J_j$ ، همین استدلال نشان می‌دهد که

$$\sum_i \mu_0(I_i) = \sum_{i,j} \mu_0(I_i \cap J_j) = \sum_j \mu_0(J_j).$$

از این رو μ_0 خوشتعریف است، و با توجه به نحوه ساخت، جمعی متناهی است.

نشان دادن این مطلب باقی مانده است که اگر $\{I_j\}_1^\infty$ دنباله‌ای از نیم بازه‌های مجزایی باشد که $\bigcup_1^\infty I_j \in \mathcal{A}$ ، آنگاه $\mu_0(\bigcup_1^\infty I_j) = \sum_1^\infty \mu_0(I_j)$ ، چون $\bigcup_1^\infty I_j$ اجتماع متناهی از نیم بازها است، دنباله $\{I_j\}_1^\infty$ را می‌توان به تعدادی متناهی زیردنباله افزایش کرد به قسمی که اجتماع بازه‌های واقع در هر زیردنباله یک نیم بازه تنها باشد. با جداگانه در نظر گرفتن هر دنباله و استفاده از جمعی متناهی بودن μ_0 می‌توانیم فرض کنیم $\bigcup_1^\infty I_j$ یک نیم بازه مانند $I = (a, b]$ است. در این حالت داریم:

$$\mu_0(I) = \mu_0(\bigcup_1^n I_j) + \mu_0(I \setminus \bigcup_1^n I_j) \geq \mu_0(\bigcup_1^n I_j) = \sum_1^n \mu_0(I_j).$$

با فرض $n \rightarrow \infty$ به دست می‌آوریم $\mu_0(I) \geq \sum_1^\infty \mu_0(I_j)$. برای اثبات شمول عکس، نخست فرض می‌کنیم که a و b متناهی اند و $\varepsilon > 0$ ثابت است. چون F پیوسته راست است، $\delta > 0$ ای هست که $F(a + \delta) - F(a) < \varepsilon$ ، و چنانچه $I_j = (a_j, b_j]$ ، به ازای هر j ، $\delta_j > 0$ ای هست که $F(b_j + \delta_j) - F(b_j) < 2^{-j} \varepsilon$. بازه‌های باز $(a_j, b_j + \delta_j)$ مجموعه فشرده $[a + \delta, b]$ را می‌پوشانند، پس زیرپوششی متناهی وجود دارد. با کنار گذاشتن هر $(a_j, b_j + \delta_j)$ ای که در یکی از بزرگترها مشمول است و با اندیس‌گذاری مجدد J می‌توان فرض کرد که:

$$\bullet (a_1, b_1 + \delta_1), \dots, (a_N, b_N + \delta_N) \text{ مجموعه } [a + \delta, b] \text{ را می‌پوشانند،}$$

$$\bullet \text{ به ازای } j = 1, \dots, N-1, b_j + \delta_j \in (a_{j+1}, b_{j+1} + \delta_{j+1}).$$

اما در این صورت

$$\begin{aligned} \mu_o(I) &< F(b) - F(a + \delta) + \varepsilon \\ &\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_1) + \varepsilon \\ &= F(b + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{j=1}^{N-1} [F(a_{j+1}) - F(a_j)] + \varepsilon \\ &\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{j=1}^{N-1} [F(b_j + \delta_j) - F(a_j)] + \varepsilon \\ &< \sum_{j=1}^N [F(b_j) + \varepsilon 2^{-j} - F(a_j)] + \varepsilon \\ &< \sum_{j=1}^{\infty} \mu_o(I_j) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

چون ε دل خواه است وقتی a و b متناهی باشند به حکم رسیده‌ایم. اگر $a = -\infty$ ، به ازای هر $M < \infty$ بازه‌های از

$(a_j, b_j + \delta_j)$ مجموعه $[-M, b]$ را می‌پوشانند، لذا همان استدلال فوق به دست می‌دهد:

$$F(b) - F(-M) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_o(I_j) + 2\varepsilon$$

در حالی که اگر $b = \infty$ ، به طریق مشابه به ازای هر $M < \infty$ به دست می‌آوریم:

$$F(M) - F(a) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_o(I_j) + 2\varepsilon$$

بنابراین حکم خواسته شده با فرض $\varepsilon \rightarrow 0$ و $M \rightarrow \infty$ به دست می‌آید. ■

۱.۱۶ قضیه. چنانچه $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابع صعودی از راست پیوسته‌ای باشد، اندازه برل یکتایی چون μ_F روی \mathbb{R} وجود

دارد به قسمی که به ازای هر a, b داریم:

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a).$$

هرگاه G تابع دیگری از این سنخ باشد، داریم $\mu_F = \mu_G$ اگر و فقط اگر $F - G$ ثابت باشد. به عکس، اگر μ اندازه برلی

روی \mathbb{R} باشد که روی همه مجموعه‌های برل کراندار، متناهی است و تعریف کنیم

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0, x]) & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -\mu((x, 0]) & x < 0. \end{cases}$$

آنگاه F صعودی و از راست پیوسته است و $\mu_F = \mu$.

برهان. بنابر گزاره ۱.۱۵ هر F یک پیش‌اندازه روی \mathcal{A} القاء می‌کند. واضح است که F و G پیش‌اندازه یکسانی القاء

می‌کنند اگر و فقط اگر $F - G$ ثابت باشد و روشن است که این پیش‌اندازه‌ها σ -متناهی‌اند (زیرا $\mathbb{R} = \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} (j, j+1]$).

بنابر این دو حکم نخست از قضیه ۱.۱۴ نتیجه می‌شود. برای حکم آخر، یکنوایی μ یکنوایی F را ایجاب می‌کند، و پیوستگی μ

از بالا و پائین، پیوستگی راست F را به ازای $x \geq 0$ و $x < 0$ ایجاب می‌کند. بدیهی است که روی \mathcal{A} داریم $\mu = \mu_F$ و از این رو بنا بر یکتایی ذکر شده در قضیه ۱.۱۴، روی $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ داریم $\mu = \mu_F$. ■

چند تذکر مرتب: اولاً، این نظریه را می‌توان به طور یکسان با به‌کارگیری بازه‌های به شکل $[a, b)$ و توابع از چپ پیوسته‌ای چون F ایجاد کرد. دوماً، اگر μ یک اندازه برل متناهی روی \mathbb{R} باشد، آنگاه $\mu = \mu_F$ که در آن $F(x) = \mu((-\infty, x])$ تابع توزیع تجمعی μ است؛ این تابع با F ای که در قضیه ۱.۱۶ با مقدار ثابت $\mu((-\infty, 0])$ معرفی شد تفاوت دارد. سوماً، نظریه بند ۱.۴ برای هر تابع صعودی و از راست پیوسته مانند F ، نه فقط اندازه برل μ_F بلکه اندازه کاملی مانند $\bar{\mu}_F$ که دامنه‌اش شامل $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ است به دست می‌دهد. در واقع، $\bar{\mu}_F$ دقیقاً کامل شده μ_F است (قسمت الف) از تمرین ۲۲ یا قضیه ۱.۱۹ را ببینید) و می‌توان نشان داد که دامنه $\bar{\mu}_F$ همواره اکیداً بزرگتر از $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ است. معمولاً این اندازه کامل را نیز با μ_F نشان می‌دهیم؛ این اندازه کامل را اندازه لبگ - اشتیلیس مربوط به F می‌نامیم.

اندازه‌های لبگ - اشتیلیس از برخی خواص قانونمند برخوردارند که اکنون به آنها می‌پردازیم. در این بحث اندازه لبگ - اشتیلیسی چون μ روی \mathbb{R} که به تابع صعودی از راست پیوسته‌ای چون F مربوط است را ثابت می‌گیریم و دامنه μ را با \mathcal{M}_{μ} نشان می‌دهیم. بنا بر این به ازای هر $E \in \mathcal{M}_{\mu}$

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} [F(b_j) - F(a_j)] : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j] \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j]) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j] \right\}. \end{aligned}$$

نخست خواهیم دید که در فرمول دوم برای $\mu(E)$ نیم بازه‌ها با نیم بازه‌های باز قابل تعویضند.

۱.۱۷. لم. به ازای هر $E \in \mathcal{M}_{\mu}$

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j)) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j) \right\}.$$

برهان. عبارت سمت راست را $\nu(E)$ می‌نامیم. فرض کنید $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$. هر (a_j, b_j) اجتماع مجزای شمارایی از نیم بازه‌هایی چون I_j^k ($k = 1, 2, \dots$) است؛ به طور صریح $I_j^k = (c_j^k, c_j^{k+1})$ که در آن $\{c_j^k\}$ دنباله‌ای است که $c_j^1 = a_j$ و وقتی $k \rightarrow \infty$ ، c_j^k به b_j نزول می‌کند. بنا بر این $E \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} I_j^k$ و لذا

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j)) = \sum_{j,k=1}^{\infty} \mu(I_j^k) \geq \mu(E),$$

و در نتیجه $\nu(E) \geq \mu(E)$. از سوی دیگر، برای $\varepsilon > 0$ مفروض، دنباله‌ای چون $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^{\infty}$ وجود دارد که $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j]$ و $\sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j]) \leq \mu(E) + \varepsilon$ و به ازای هر j ، $\delta_j > 0$ هست به طوری که $F(b_j + \delta_j) - F(b_j) < 2^{-j} \varepsilon$ و $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j + \delta_j)$ در نتیجه

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j + \delta_j)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j, b_j]) + \varepsilon \leq \mu(E) + 2\varepsilon.$$

پس $\nu(E) \leq \mu(E)$ ■

۱.۱۸ قضیه. اگر $E \in \mathcal{M}_\mu$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \inf\{\mu(U) : U \supset E, \text{ باز است } U\} \\ &= \sup\{\mu(K) : K \subset E, \text{ فشرده است } K\}. \end{aligned}$$

برهان. بنابر لم ۱.۱۷، به ازای هر $\varepsilon > 0$ بازهای (a_j, b_j) وجود دارد به طوری که $E \subset \bigcup_1^\infty (a_j, b_j)$ و

$$\sum_1^\infty \mu((a_j, b_j)) \leq \mu(E) + \varepsilon.$$

اگر $U = \bigcup_1^\infty (a_j, b_j)$ ، آنگاه $U \supset E$ باز است؛ $U \supset E$ و $\mu(U) \leq \mu(E) + \varepsilon$ از سوی دیگر، هرگاه $U \supset E$ ، پس نخستین تساوی به دست آمده است. برای دومی، نخست فرض کنید که E کراندار است. اگر E بسته باشد، آنگاه E فشرده است و تساوی مورد نظر واضح است. در غیر این صورت برای $\varepsilon > 0$ مفروض می‌توانیم مجموعه‌ی باز $U \supset E \setminus \bar{E}$ انتخاب کنیم به قسمی که $\mu(U) \leq \mu(\bar{E} \setminus E) + \varepsilon$ فرض می‌کنیم $K = \bar{E} \setminus U$ در این صورت K فشرده است، $K \subset E$ و

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \mu(E) - \mu(E \cap U) = \mu(E) - [\mu(U) - \mu(U \setminus E)] \\ &\geq \mu(E) - \mu(U) + \mu(\bar{E} \setminus E) \geq \mu(E) - \varepsilon. \end{aligned}$$

چنانچه E غیر کراندار باشد، قرار می‌دهیم: $E_j = E \cap (j, j+1]$ ، بنابر استدلال فوق، برای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه‌ی فشرده‌ای

مانند $K_j \subset E_j$ وجود دارد که $\mu(K_j) \geq \mu(E_j) - \frac{\varepsilon}{2^{|j|}}$ فرض می‌کنیم $H_n = \bigcup_{-n}^n K_j$ در این صورت H_n فشرده است، $H_n \subset E$ و $\mu(H_n) \geq \mu(\bigcup_{-n}^n E_j) - \varepsilon$ چون $\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\bigcup_{-n}^n E_j)$ ، حکم حاصل می‌گردد. ■

۱.۱۹ قضیه. اگر $E \subset \mathbb{R}$ ، آنگاه عبارات زیر هم‌ارزند:

(الف) $E \in \mathcal{M}_\mu$

(ب) $E = V \setminus N_1$ که در آن V یک مجموعه‌ی G_δ است و $\mu(N_1) = 0$.

(ج) $E = H \cup N_1$ که در آن H یک مجموعه‌ی F_σ است و $\mu(N_1) = 0$.

برهان. واضح است که هر کدام از قسمت‌ها (ب) و (ج) قسمت (الف) را ایجاب می‌کنند زیرا μ روی \mathcal{M}_μ کامل است. فرض می‌کنیم $E \in \mathcal{M}_\mu$ و $\mu(E) < \infty$. بنا بر قضیه ۱۸.۰، برای هر $j \in \mathbb{N}$ می‌توان مجموعه‌ای $U_j \supset E$ و مجموعه فشرده‌ای مانند $K_j \subset E$ یافت به طوری که

$$\mu(U_j) - 2^{-j} \leq \mu(E) \leq \mu(K_j) + 2^{-j}.$$

فرض کنید $V = \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$ و $H = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. در این صورت $H \subset E \subset V$ و

$$\mu(V) = \mu(H) = \mu(E) < \infty,$$

لذا $\mu(V \setminus E) = \mu(E \setminus H) = 0$. بنا بر این وقتی $\mu(E) < \infty$ حکم اثبات شده است، تعمیم به حالت کلی برای خواننده باقی می‌ماند. (تمرین ۲۵). ■

مضمون قضیه ۱۸.۱۹ این است که همه مجموعه‌های برل (یا به طور کلی‌تر، همه مجموعه‌های واقع در \mathcal{M}_μ) به یک شکل ساده و منطقی به پیمانانه مجموعه‌های از اندازه صفر هستند. این به طور محسوسی با ابزارهای لازم برای مقایسه مجموعه‌های برل با مجموعه‌های باز قابل قیاس است به شرطی که مجموعه‌های پوچ مستثنی نشوند؛ گزاره ۱۰.۲۳ را ببینید. نوع دیگری از دیدگاه که مجموعه‌های اندازه‌پذیر کلی را بتوان با مجموعه‌های «ساده» تقریب زد در گزاره زیر گنجانده شده است، که برهانش برای خواننده باقی مانده است (تمرین ۲۶).

۱۰.۲۰ گزاره. اگر $E \in \mathcal{M}_\mu$ و $\mu(E) < \infty$ ، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه‌ای چون A وجود دارد که اجتماعی متناهی از بازه‌های باز است به طور که $\mu(E \Delta A) < \varepsilon$.

اکنون مهمترین اندازه روی \mathbb{R} ، یعنی «اندازه لبگ» را مورد بررسی قرار می‌دهیم: این اندازه، اندازه کاملی چون μ_F مربوط به تابع $F(x) = x$ است، که برای آن، اندازه یک بازه به طور ساده طولش است. آن را با m نشان خواهیم داد. دامنه m رده مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ نامیده می‌شود، و آنرا با \mathcal{L} نشان خواهیم داد. همچنین از تحدید m به $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ تحت عنوان اندازه لبگ یاد خواهیم کرد.

مهمترین خواص اندازه لبگ پایایی آن تحت انتقال‌ها و رفتار ساده آن تحت تجانس‌ها است. اگر $r, s \in \mathbb{R}$ و $E \subset \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم:

$$E + s = \{x + s : x \in E\}, \quad rE = \{rx : x \in E\}.$$

۱۰.۲۱ قضیه. اگر $E \in \mathcal{L}$ ، آنگاه $E + s \in \mathcal{L}$ و $rE \in \mathcal{L}$ به ازای هر $r, s \in \mathbb{R}$ برقرار است، به علاوه

$$m(rE) = |r|m(E) \text{ و } m(E + s) = m(E).$$

برهان. چون گردایی بازه‌های باز تحت انتقال‌ها و تجانس‌ها پایا است، همین مطلب در مورد \mathcal{B}_R درست است. به ازای $E \in \mathcal{B}_R$ ، قرار دهید $m_s(E) = m(E + s)$ و $m_r(E) = m(rE)$. در این صورت به وضوح m_s و m_r با m و $|r|m$ روی اجتماع‌های متناهی از بازه‌ها برابرند، در نتیجه بنابر قضیه ۱.۱۴ روی \mathcal{B}_R با هم برابرند. به ویژه، اگر $E \in \mathcal{B}_R$ و $m(E) = 0$ ، آنگاه $m(E + s) = m(rE) = 0$ ، و از اینجا معلوم می‌شود که رده مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ با اندازه صفر تحت انتقال‌ها و تجانس‌ها حفظ می‌شود. نتیجه می‌گیریم که \mathcal{L} (یعنی اعضای که اجتماع‌ها از یک مجموعه برل و یک مجموعه پوچ لبگ هستند) تحت انتقال‌ها و تجانس‌ها حفظ می‌شود و $m(E + s) = m(E)$ و $m(rE) = |r|m(E)$ به ازای هر $E \in \mathcal{L}$ برقرار است. ■

نظریه اندازه و خواص توپولوژیک زیرمجموعه‌های \mathbb{R} رابطه تنگاتنگی دارند که شامل برخی از شگفتی‌ها است. حقایق زیر را مد نظر قرار دهید. هر مجموعه تک عضوی در \mathbb{R} دارای اندازه لبگ صفر است، و از این رو هر مجموعه شمارش‌پذیر از اندازه صفر می‌باشد. به ویژه $m(\mathbb{Q}) = 0$. فرض کنید $\{r_j\}_1^\infty$ شمارشی از اعداد گویای واقع در $[0, 1]$ است، و $\varepsilon > 0$ مفروض است، فرض کنید I_j بازه بازی است که مرکزش در r_j بوده و طولش $\varepsilon 2^{-j}$ می‌باشد. در این صورت مجموعه $U = (0, 1) \cap \bigcup_1^\infty I_j$ باز است و در $[0, 1]$ چگال می‌باشد، اما $\varepsilon = \sum_1^\infty \varepsilon 2^{-j} = m(U) \leq \sum_1^\infty \varepsilon 2^{-j} = \varepsilon$ ، یعنی U متکم $K = [0, 1] \setminus U$ باز است و هیچ‌جا چگال می‌باشد، اما $m(K) \geq 1 - \varepsilon$. بنابر این مجموعه‌ای که باز و چگال و در نتیجه از نظر توپولوژیکی «بزرگ است» می‌تواند از نظر اندازه کوچک باشد و مجموعه‌ای که هیچ‌جا چگال و در نتیجه از نظر توپولوژیکی «کوچک» است می‌تواند از نظر اندازه بزرگ باشد. (هر چند یک مجموعه باز ناتمامی نمی‌تواند دارای اندازه صفر باشد).

مجموعه‌های پوچ لبگ نه تنها شامل همه مجموعه‌های شمارش‌پذیر است بلکه شامل بسیاری از مجموعه‌هایی است که کاردینال پیوستاری دارند. اکنون مثال استاندارد یعنی مجموعه کانتور را می‌آوریم که برای اهداف دیگر نیز جالب است. هر $x \in [0, 1]$ یک نمایش اعشاری در مبنای ۳ مانند $x = \sum_1^\infty 3^{-j} a_j$ دارد که در آن، $a_j = 0, 1, 2$ یا $a_j = 0$ این نمایش یکتاست مگر اینکه به ازای اعداد صحیحی چون k, p ، x به شکل $3^{-k} p$ باشد که در این حالت x دارای دو نمایش است: یکی با $a_j = 0$ برای $j > k$ و یکی با $a_j = 2$ برای $j > k$. فرض کنید p به وسیله ۳ عاد نشود، یکی از این نمایش‌ها $a_k = 1$ و دیگری $a_k = 0$ خواهد داشت. چنانچه توافق کنیم که همیشه از نمایش دوم استفاده کنیم، می‌بینیم که

$$\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \text{ اگر } a_1 = 1$$

$$\frac{1}{9} < x < \frac{2}{9} \text{ یا } \frac{7}{9} < x < \frac{8}{9} \text{ اگر } a_1 = 0 \text{ و } a_2 \neq 1$$

و الی آخر. همچنین ملاحظه اینکه اگر $x = \sum_1^\infty 3^{-j} a_j$ و $y = \sum_1^\infty 3^{-j} b_j$ ، آنگاه $x < y$ اگر و فقط اگر n ای موجود باشد که $a_n < b_n$ و $a_j = b_j$ به ازای $j < n$ مفید خواهد بود.

مجموعه کانتور C مجموعه تمام x هایی در $[0, 1]$ است که دارای نمایشی چون $x = \sum 3^{-j} a_j$ در مبنای ۳ هستند که در آن به ازای هر j ، $a_j \in \{0, 1, 2\}$ پس C با حذف یک سوم میانی $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ و سپس حذف $(\frac{2}{9}, \frac{7}{9})$ و $(\frac{7}{27}, \frac{20}{27})$ از دو بازه باقیمانده و ... به دست می‌آید. خواص اساسی C در زیر خلاصه شده است:

۱.۲۲ گزاره. فرض کنید C مجموعه کانتور باشد.

(الف) C فشرده، هیچ جا چگال و ناهمبند کلی است (یعنی، تنها زیر مجموعه‌های همبند C نقاط تنها هستند). به علاوه C نقطه تنها ندارد.

(ب) $m(C) = 0$.

(ج) $\text{card}(C) = c$.

برهان. اثبات (الف) را به خواننده واگذار می‌کنیم (تمرین ۲۷). اما (ب)، C از $[0, 1]$ با حذف یک بازه به طول $\frac{1}{3}$ ، دو بازه به طول $\frac{1}{9}$ و غیره به دست می‌آید. بنابر این

$$m(C) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^j}{3^{j+1}} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = 0$$

بالاخره، فرض کنید $x \in C$ ، در این صورت $x = \sum_{j=0}^{\infty} a_j 3^{-j}$ که در آن به ازای هر j ، $a_j \in \{0, 1, 2\}$ قرار می‌دهیم $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j 2^{-j}$ که در آن $b_j = \frac{a_j}{3}$ سری تعریف کننده $f(x)$ بسط یک عدد واقع در $[0, 1]$ در مبنای ۲ است، و هر عدد در $[0, 1]$ را می‌توان به این روش به دست آورد. بنابر این f مجموعه C را بروی $[0, 1]$ می‌نگارد و (ج) نتیجه می‌شود. ■

اکنون تابع f مذکور در برهان قبل را با دقت بیشتری مورد بررسی قرار می‌دهیم. قبلاً دیده شد که اگر $x, y \in C$ و $x < y$ ، آنگاه $f(x) < f(y)$ مگر اینکه x و y نقاط انتهایی یکی از بازه‌های حذف شده از $[0, 1]$ برای به دست آوردن C باشند. در این حالت به ازای اعداد صحیحی چون $f(x) = 2^{-k} p$ ، p, k دو نمایش این عدد در مبنای ۲ است. بنابراین با ثابت قلمداد کردن f روی هر زیر بازه حذف شده از C می‌توان f را از $[0, 1]$ بروی خودش توسعه داد. این توسعه f هنوز صعودی است، و چون بردش کل $[0, 1]$ است نمی‌تواند هیچ ناپیوستگی جهشی داشته باشد. f را تابع کانتور یا تابع لبگ-کانتور می‌نامیم. ساختن مجموعه کانتور با شروع از $[0, 1]$ حذف پی در پی یک سوم‌های میانی بازه‌ها، دارای یک تعمیم بدیهی است. اگر I یک بازه کراندار باشد و $\alpha \in (0, 1)$ ، بازه‌بازی را که نقطه وسط آن همان نقطه وسط I است و طولش α برابر طول I است را « α آمین باز میانی» I می‌نامیم. اگر $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد واقع در $(0, 1)$ باشد، آنگاه می‌توانیم دنباله‌ای نزولی مانند $\{K_j\}$ از مجموعه‌های بسته به صورت زیر تعریف کنیم: $K_0 = [0, 1]$ و K_j با حذف α_j آمین باز میانی از هر یک از بازه‌هایی که K_{j-1} را می‌سازند به دست آمده باشد، مجموعه حدی حاصل یعنی $K = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$ را یک مجموعه کانتور تعمیم یافته می‌نامیم. مجموعه‌های کانتور تعمیم یافته همگی با مجموعه کانتور معمولی در خواص (الف) و (ب) از گزاره

۱.۲۲ مشترک‌کاند. در مورد اندازه لیگ، به وضوح $m(K_j) = (1 - \alpha_j)m(K_{j-1})$ پس $m(K)$ حاصلضرب نامتناهی $\prod_{j=1}^{\infty} (1 - \alpha_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n (1 - \alpha_j)$ است. چنانچه همه a_j ها با عضو ثابتی چون $\alpha \in (0, 1)$ برابر باشند (برای مثال $\alpha = \frac{1}{4}$ در مورد مجموعه کانتور معمولی)، داریم $m(K) = 0$. اما اگر با سرعت کافی $\alpha_j \rightarrow 0$ وقتی $j \rightarrow \infty$ ، $m(K)$ مثبت خواهد بود و به ازای هر $\beta \in (0, 1)$ می‌توان a_j را چنان انتخاب کرد که $m(K)$ مساوی β باشد؛ تمرین ۳۲ را ببینید. این روش دیگری برای ساختن مجموعه‌های هیچ‌جا چگال با اندازه مثبت است. چنین نیست که هر مجموعه اندازه پذیر لیگ یک مجموعه برل باشد. می‌توان به کمک تابع کانتور مثال‌هایی در $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \setminus \mathcal{L}$ آورد؛ تمرین ۹ در فصل ۲ را ببینید. می‌توان دید که چون هر زیر مجموعه از مجموعه کانتور، اندازه پذیر لیگ است، داریم $\text{card}(\mathcal{L}) = \text{card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) > c$ ، در حالی که $\text{card}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = c$. حکم اخیر از گزاره ۱.۲۳ زیر حاصل می‌شود.

تمرین‌ها

(۲۵) برهان قضیه ۱.۱۹ را کامل کنید.

(۲۶) گزاره ۱.۲۰ را ثابت کنید. (قضیه ۱.۱۸ را به کار برید.)

(۲۷) قسمت (الف) از گزاره ۱.۲۲ را ثابت کنید. (نشان دهید که اگر $x, y \in C$ و $x < y$ ، آنگاه $C \not\subseteq \mathbb{Z}$ وجود دارد به طوری که $x < z < y$.)

(۲۸) فرض کنید F صعودی و از راست پیوسته باشد و μ_F اندازه مربوطه باشد. در این صورت

$$\mu_F(\{a\}) = F(a) - F(a-),$$

$$\mu_F([a, b]) = F(b-) - F(a-),$$

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a-),$$

$$\mu_F((a, b)) = F(b-) - F(a).$$

(۲۹) فرض کنید E یک مجموعه اندازه پذیر لیگ باشد.

(الف) اگر $E \subset N$ که در آن N مجموعه اندازه ناپذیر توصیف شده در بند ۱.۱ است، آنگاه $m(E) = 0$.

(ب) اگر $m(E) > 0$ ، آنگاه E شامل یک مجموعه اندازه ناپذیر است. (کافی است فرض کنید $E \subset [0, 1]$. مطابق با

نمادگذاری بند ۱.۱، $E = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} E \cap N_r$.)

(۳۰) اگر $E \in \mathcal{L}$ و $m(E) > 0$ ، آنگاه به ازای هر $\alpha < 1$ ، بازه‌بازی چون I وجود دارد به طوری که

$$m(E \cap I) > \alpha m(I).$$

(۳۱) اگر $E \in \mathcal{L}$ و $m(E) > 0$ ، آنگاه مجموعه $E - E = \{x - y : x, y \in E\}$ شامل یک بازه با مرکز 0 است.
 (اگر I مثل تمرین ۳۰ با $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $E - E$ شامل $(-\frac{1}{4}m(I), \frac{1}{4}m(I))$ است.)

(۳۲) فرض کنیم $\{\alpha_j\}_1^\infty \subset (0, 1)$.

(الف) $\prod_1^\infty (1 - \alpha_j) > 0$ اگر و فقط اگر $\sum_1^\infty \alpha_j < \infty$. $\sum_1^\infty \log(1 - \alpha_j)$ را با $\sum \alpha_j$ مقایسه کنید.

(ب) $\beta \in (0, 1)$ مفروض است، دنباله‌ای چون $\{\alpha_j\}$ ارائه دهید که $\prod_1^\infty (1 - \alpha_j) = \beta$.

(۳۳) مجموعه برلی چون $A \subset [0, 1]$ وجود دارد به طوری که $0 < m(A \cap I) < m(I)$ به ازای هر زیربازه مانند I از $[0, 1]$ برقرار است. (راهنمایی: هر زیربازه از $[0, 1]$ شامل مجموعه‌هایی از نوع کانتور با اندازه مثبت است.)

۱.۶ یادداشت‌ها و مراجع

تاریخ نظریه اندازه و تاریخ انتگرالگیری که شرح آن در بند ۲.۷ خواهد آمد، خیلی به هم نزدیک هستند.
 بند ۱.۱: نخستین بار پارادوکس باناخ - تارسکی در [۱۱] آمد، اما تفاوت زیر به هاسدورف برمی‌گردد [۶۸]:
 کره واحد در \mathbb{R}^2 ، یعنی $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ اجتماعی از چهار مجموعه جدا از هم مانند E_1, \dots, E_7 است به‌قسمی که (الف):
 E_i شمارش‌پذیر است، (ب): مجموعه‌های $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7$ همگی تصویر یکی دیگر تحت دوران‌ها هستند.

یک بیان مقدماتی از پارادوکس باناخ - تارسکی و حکم هاسدورف را می‌توان در استرامبرگ یافت.

بند ۱.۲: مشخص کردن σ -جبر $\mathcal{M}(E)$ تولید شده با خانواده‌ای چون $E \subset \mathcal{P}(X)$ ساختنی نیست و باید بپرسیم که چگونه می‌توان $\mathcal{M}(E)$ را به طور صریح از E به دست آورد. پاسخ نسبتاً پیچیده است. می‌توان به صورت زیر شروع کرد:
 فرض کنیم $\mathcal{E}_1 = E \cup \{E^c : E \in \mathcal{E}\}$ و به ازای $j > 1$ ، \mathcal{E}_j را گردایه همه مجموعه‌هایی تعریف کنید که اجتماع‌هایی شمارش‌پذیر از مجموعه‌های واقع در \mathcal{E}_j یا متمم‌های چنین مجموعه‌هایی هستند. فرض کنید $\mathcal{E}_\omega = \bigcup_1^\infty \mathcal{E}_j$ آیا $\mathcal{E}_\omega = \bigcup_1^\infty \mathcal{E}_j$ ؟ در حالت کلی چنین نیست. \mathcal{E}_ω تحت متمم‌گیری بسته است، اما اگر (به ازای هر j)، $E_j \in \mathcal{E}_j \setminus \mathcal{E}_{j-1}$ ، آنگاه هیچ دلیلی برای اینکه $\mathcal{E}_\omega = \bigcup_1^\infty \mathcal{E}_j$ باشد وجود ندارد. پس همه چیز را باید از نو شروع کنیم. به‌طور دقیق‌تر، باید به ازای هر اردینال شمارش‌پذیر مانند α طبق استقرای ترانسفینی (فرآمتاهی) \mathcal{E}_ω گردایه مجموعه‌هایی است که اجتماع‌های شمارش‌پذیری از مجموعه‌های واقع در \mathcal{E}_β یا متمم‌های چنین مجموعه‌هایی است؛ در غیر این صورت \mathcal{E}_β در نتیجه:

۱.۲۳ گزاره: $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathcal{E}_\alpha$ ، که در آن مجموعه تمام اردینال های شمارش پذیر است. برهان. استقرای ترانسفینی نشان می دهد که به ازای هر $\alpha \in \Omega$ ، $\mathcal{E}_\alpha \subset \mathcal{M}(\mathcal{E})$ ، و از این رو $\bigcup_{\alpha < \beta} \mathcal{E}_\alpha \subset \mathcal{M}(\mathcal{E})$. نامساوی عکس از این حقیقت ناشی می شود که هر دنباله در Ω دارای یک سوپرمم در Ω است (گزاره ۱.۰۱): اگر $E_j \in \mathcal{E}_{\alpha_j}$ به ازای $j \in \mathbb{N}$ برقرار باشد و $\alpha = \sup\{\alpha_j\}$ ، آنگاه به ازای هر j ، $E_j \in \mathcal{E}_\alpha$ و از این رو $\bigcup_1^\infty E_j \in \mathcal{E}_\alpha$ که در آن β تالی α است. ■

با تلفیق این مطلب و گزاره ۱.۱۴، می بینیم که اگر $\text{card}(\mathbb{N}) \leq \text{card}(\mathcal{E}) \leq \aleph$ ، آنگاه $\text{card}(\mathcal{M}(\mathcal{E})) = \aleph$ (به تمرین ۳ مراجعه کنید).

بند ۱.۳: برخی از مؤلفین اصرار دارند که اگر دامنه های اندازه ها σ - حلقه ها باشد بهتر از σ - جبرها است. (تمرین ۱ را ببینید). دلیلش این است که در بحث در مورد فضاهای «بسیار بزرگ»، می توان از امراضی معینی که با مد نظر قرار ندادن مجموعه های «با اندازه بزرگ» ایجاد می شود اجتناب کرد. اما، این نقطه نظر نیز از نظر تکنیکی ضرر و زیان هایی دارد، و طرفدار زیادی ندارد.

بند ۱.۴: قضیه کاراتودوری در مقاله اش آمده است [۲۲]. در نوشته ها قضیه ۱.۱۴ را به هان، کاراتودوری و ای. هویف نسبت داده اند اما قبلاً آن را به فرشه نسبت می دادند [۵۴]. برهان قضیه کاراتودوری به طور مستقل توسط هان [۶۰] و کولوموگورف [۸۵] کشف شده بود.

برای مطالعه عمیق تر مسئله ساختن اندازه ها از داده های بسیار ابتدایی، کونیک [۸۶] را ببینید.

بند ۱.۵: در ابتدا لبگ اندازه خارجی $m^*(E)$ از یک مجموعه مانند $E \subset \mathbb{R}$ را بر حسب پوشش های شمارش پذیر به وسیله بازه ها تعریف کرد همان طور که ما انجام دادیم. سپس وی مجموعه کراندار E را اندازه پذیر تعریف کرد در صورتی که:

$$m^*(E) + m^*((a, b) \setminus E) = b - a$$

که در آن (a, b) بازه ای شامل E است و یک مجموعه غیر کراندار را اندازه پذیر تعریف کرد در صورتی که اشتراک آن با هر بازه کراندار، اندازه پذیر باشد. رده بندی کاراتودوری از اندازه پذیری که از نظر تکنیکی برای کار کردن آسان است بعداً می آید. برای معادل بودن دو تعریف، تمرین ۱۹ را ببینید.

با نگاهی به پیچیدگی راه هایی که در آنها بتوان یک نیم بازه را به اجتماعی از زیربازه های نیم باز تجزیه کرد خود را قانع می کنیم که برهان پرهیاهوی مثال زدنی گزاره ۱.۱۵ لازم و اجتناب ناپذیر است. در هر چنین تجزیه ای، گردایه نقاط انتهایی

راست زیربازه‌ها، وقتی از چپ به راست مرتب شوند، یک مجموعه خوشترتیب است، اما این مجموعه می‌تواند با هر قطعه اولیه از مجموعه اردینال‌های شمارش‌پذیر ایزومورف ترتیبی باشد.

می‌توان اندازه لبگ را به یک اندازه تحت انتقال پایا روی σ -جبرهایی توسیع داد که به طور سره \mathcal{L} را دربر دارند؛ کاکوتانی و اگستینی [۸۱] را ببینید. البته، چنین σ -جبرهایی هرگز نمی‌توانند شامل مجموعه اندازه ناپذیر ذکر شده در بند ۱ باشند. اما، اندازه لبگ را می‌توان به اندازه جمعی متناهی تحت انتقال پایایی روی $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ توسیع داد، و مشابه ۲- بعدی آن را می‌توان به یک اندازه جمعی متناهی روی $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ توسیع داد که تحت انتقال‌ها و دوران‌ها پایا است؛ باناخ [۸] را ببینید. پارادوکس باناخ - تارسکی مانع از آن می‌شود که این حکم به ابعاد بالاتر تعمیم یابد.

در ارتباط با وجود مجموعه‌های اندازه ناپذیر، سولووی [۱۳۸] قضیه قابل ذکرى اثبات کرده است مبنی بر این که: امکان ندارد بدون استفاده از اصل انتخاب، وجود مجموعه‌های غیر اندازه‌پذیر لبگ را اثبات کنیم. (صورت دقیق قضیه حاوی برخی از نکات تکنیکی نظریه مجموعه اصل موضوعی است که در این کتاب به آن نخواهیم پرداخت.) از دید آنالیز کارها، در اصل قضیه سولووی برای تایید دوباره کفایت نظریه لبگ برای همه اهداف معقول است. برای حل کوتاهی از تمرین ۳۳ رودین [۱۲۴] را ببینید.

فصل دوم انتگرال گیری

در نظریه کلاسیک انتگرال گیری روی \mathbb{R} ، $\int_a^b f(x)$ به عنوان حدی از مجموع‌های ریمان تعریف می‌شود، که این مجموع‌ها انتگرال‌های توابعی هستند که f را تقریب می‌زنند و روی زیر بازه‌های $[a, b]$ ثابت هستند. به طور مشابه، روی هر فضای اندازه، مفهوم صریحی از انتگرال برای توابعی که «به مفهومی مناسب» موضعاً ثابت هستند وجود دارد و آن را می‌توان به یک انتگرال برای توابع کلی‌تر تعمیم داد. در این فصل، با مورد توجه قرار دادن انتگرال لیبگ روی \mathbb{R} تعمیم آن به \mathbb{R}^n ، نظریه انتگرال‌گیری روی فضاهای اندازه مجرد را ایجاد می‌کنیم.

۲.۱ توابع اندازه‌پذیر

مطالعه نظریه انتگرال‌گیری را با بحث در نگاشت‌هایی آغاز می‌کنیم که مورفیسیم‌های واقع در کاتگوری فضاهای اندازه می‌باشد. یادآور می‌شویم که هر تابع مانند $f: X \rightarrow Y$ بین دو مجموعه، نگاشتی چون $\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y): f^{-1}$ با تعریف $f^{-1}(E) = \{x \in X : f(x) \in E\}$ القاء می‌کند که این نگاشت اجتماع‌ها، اشتراک‌ها و متمم‌ها را حفظ می‌کند. بنابر این اگر \mathcal{N} یک σ -جبر روی Y باشد، $\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{N}\}$ یک σ -جبر روی X است؛ چنانچه (X, \mathcal{M}) و (Y, \mathcal{N}) دو فضای اندازه‌پذیر باشد، تابعی چون $f: X \rightarrow Y$ را $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ - اندازه‌پذیر (یا وقتی \mathcal{M} و \mathcal{N} معلوم‌اند فقط اندازه‌پذیر) نامیم در صورتی که به ازای هر $E \in \mathcal{N}$ ، $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$. واضح است که ترکیب نگاشت‌های اندازه‌پذیر، اندازه‌پذیر است؛ یعنی اگر $f: X \rightarrow Y$ یک تابع $(\mathcal{M}_1, \mathcal{N})$ - اندازه‌پذیر و $g: Y \rightarrow Z$ یک تابع $(\mathcal{N}, \mathcal{O})$ - اندازه‌پذیر باشد، آنگاه $g \circ f$ یک تابع $(\mathcal{M}_1, \mathcal{O})$ - اندازه‌پذیر است.

۲.۱) گزاره اگر \mathcal{N} توسط \mathcal{E} تولید شود، آنگاه $f : X \rightarrow Y$ یک تابع $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ - اندازه‌پذیر است اگر به ازای هر $E \in \mathcal{E}$ داشته باشیم $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$.

برهان. بررسی «فقط اگر» بدیهی است. برای عکس آن، ملاحظه می‌کنیم که $\{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$ ، σ -جبری است که شامل \mathcal{E} است؛ در نتیجه شامل \mathcal{N} می‌باشد. ■

۲.۲ نتیجه. اگر X و Y دو فضای متری (یا توپولوژیک) باشند، آنگاه هر تابع پیوسته مانند $f : X \rightarrow Y$ ، $(\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y)$ - اندازه‌پذیر است.

برهان. f پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر بازه مانند $U \subset Y$ مجموعه $f^{-1}(U)$ در X باز باشد. ■

۲.۳) چنانچه (X, \mathcal{M}) یک فضای اندازه‌پذیر باشد، تابع حقیقی یا مختلط f روی X را \mathcal{M} - اندازه‌پذیر یا فقط اندازه‌پذیر خواهیم نامید در صورتی که $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ - اندازه‌پذیر یا $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ - اندازه‌پذیر باشد. همواره $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ و $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ را به عنوان σ -جبر روی فضای برد می‌گیریم مگر اینکه خلافش ذکر شود. به ویژه، $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ اندازه‌پذیر لبگ (متناظراً برل) است هرگاه $(\mathcal{L}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ - اندازه‌پذیر (متناظراً $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ - اندازه‌پذیر) باشد؛ برای $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مشابهاً عمل می‌کنیم.

۲.۴) هشدار! اگر $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر لبگ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که $f \circ g$ اندازه‌پذیر لبگ است، حتی اگر g پیوسته باشد. (هرگاه $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ ، داریم $f^{-1}(E) \in \mathcal{L}$ ، اما به جز وقتی $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ تضمینی وجود ندارد که $g^{-1}(f^{-1}(E)) \in \mathcal{L}$ باشد. تمرین ۹ را ببینید.) اما اگر f اندازه‌پذیر برل باشد، آنگاه $f \circ g$ اندازه‌پذیر برل یا لبگ است بسته به اینکه g چنین باشد.

۲.۳ گزاره. اگر (X, \mathcal{M}) یک فضای اندازه‌پذیر باشد و $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ، آنگاه عبارات زیر با هم معادلند:

(الف) f یک تابع \mathcal{M} - اندازه‌پذیر است.

(ب) به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ ، $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{M}$.

(ج) به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ ، $f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{M}$.

(د) به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ ، $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{M}$.

(ه) به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ ، $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{M}$.

برهان. این مطلب از گزاره‌های ۱.۲ و ۲.۱ حاصل شود. ■

✓ گاهی اوقات می‌خواهیم اندازه‌پذیری روی زیرمجموعه‌های X را در نظر بگیریم. اگر (X, \mathcal{M}) یک فضای اندازه‌پذیر، f تابعی روی X باشد و $E \in \mathcal{M}$ ، می‌گوییم f بر E اندازه‌پذیر است هرگاه به ازای هر مجموعه برل مانند B داشته باشیم:

$$f^{-1}(B) \cap E \in \mathcal{M}.$$

(به طور معادل، $f|_E$ - اندازه‌پذیر باشد که در آن $\mathcal{M}_E = \{F \cap E : F \in \mathcal{M}\}$ مجموعه‌ای چون X مفروض است، اگر $\{(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ خانواده‌ای از فضاهای اندازه‌پذیر باشد و به ازای هر α ، $f_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha$ یک نگاشت باشد، آنگاه کوچکترین σ -جبر یکتایی روی X وجود دارد که نسبت به آن f_α ها همگی اندازه‌پذیرند، یعنی، σ -جبر تولید شده با مجموعه‌های $f_\alpha^{-1}(E_\alpha)$ که در آن $E_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha$ و $\alpha \in A$. این σ -جبر را σ -جبر تولید شده به وسیله $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ می‌نامیم. به‌ویژه اگر $X = \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ ، می‌بینیم که σ -جبری حاصلضربی روی X که در ۱.۲ تعریف شد، σ -جبر تولید شده با نگاشت‌های مؤلفه‌ای $\pi_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha$ (است)

۲.۴ گزاره) فرض کنید (X, \mathcal{M}) و $(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)$ ($\alpha \in A$) فضاهایی اندازه‌پذیر باشند، $Y = \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ ، $\mathcal{N} = \otimes_{\alpha \in A} \mathcal{N}_\alpha$ و $\pi_\alpha : Y \rightarrow Y_\alpha$ نگاشت‌های مؤلفه‌ای باشند. در این صورت $f : X \rightarrow Y$ ، $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ -اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر به ازای هر α ، نگاشت $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ ، $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\alpha)$ -اندازه‌پذیر باشد.

برهان. اگر f اندازه‌پذیر باشد، هر f_α نیز چنین است زیرا ترکیب نگاشت‌های اندازه‌پذیر است. به عکس، اگر هر f_α اندازه‌پذیر باشد، آنگاه به ازای هر $E_\alpha \in \mathcal{N}_\alpha$ ، $f_\alpha^{-1}(E_\alpha) \in \mathcal{M}$ و $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)) = f_\alpha^{-1}(E_\alpha) \in \mathcal{M}$ و با توجه به قضیه ۲.۱، از اینجا معلوم می‌شود که f اندازه‌پذیر است. ■

۲.۵ نتیجه) تابعی چون $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ، f ، \mathcal{M} -اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر $\operatorname{Re} f$ و $\operatorname{Im} f$ هر دو \mathcal{M} -اندازه‌پذیر باشند. برهان. چون بنابر گزاره ۱.۵، $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ حکم حاصل می‌شود. ■
گاهی اوقات مناسب است که توابع با مقدار واقع در دستگاه اعداد حقیقی توسعه یافته $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ در نظر بگیریم. مجموعه‌های برل در $\bar{\mathbb{R}}$ را با

$$\mathcal{B}_{\bar{\mathbb{R}}} = \{E \subset \bar{\mathbb{R}} : E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$$

تعریف می‌کنیم. (این تعریف با تعریف عادی σ -جبر برل مطابقت دارد، یعنی با σ -جبری که با تبدیل $\bar{\mathbb{R}}$ به یک فضای متری با متر $\rho(x, y) = |A(x) - A(y)|$ به دست می‌آید، که در آن $A(x) = \arctan x$ مانند گزاره ۲.۳ به آسانی معلوم

می‌شود که $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ با نیم‌خط‌های $(a, \infty]$ یا $[-\infty, a)$ ($a \in \mathbb{R}$) تولید می‌شود، و $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ را \mathcal{M} -اندازه‌پذیر تعریف می‌کنیم در صورتی که $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ -اندازه‌پذیر باشد. تمرین ۱ را ببینید. حال ثابت می‌کنیم که اندازه‌پذیری تحت عملگرهای حدی و جبری آشنا حفظ می‌شود.

۲.۶ گزاره. اگر $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ هر دو \mathcal{M} -اندازه‌پذیر باشند، آنگاه $f + g$ و fg نیز چنین هستند.

برهان. توابع $f, g: X \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ و $\phi: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ و $\psi: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x) = (f(x), g(x)),$$

$$\phi(z, w) = z + w,$$

$$\psi(z, w) = zw.$$

چون بنابر گزاره ۱.۵ $\mathcal{B}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} = \mathcal{B}_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ ، لذا طبق گزاره ۲.۴، F یک تابع $(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}})$ -اندازه‌پذیر است، اما بنابر نتیجه ۲.۲، ϕ و ψ ، $(\mathcal{B}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ -اندازه‌پذیر هستند. بنابر این $f + g = \phi \circ F$ و $fg = \psi \circ F$ هر دو \mathcal{M} -اندازه‌پذیرند. ■

گزاره ۲.۶ برای توابع با مقادیر واقع در $\overline{\mathbb{R}}$ نیز معتبر است به شرطی که به فکر عبارات مبهم $\infty - \infty$ و $\infty \cdot \infty$ باشیم (اما به یاد آورید که برای راحتی همواره $\infty \cdot \infty$ را ∞ تعریف می‌کنیم). تمرین ۲ را ببینید.

۲.۷ گزاره. اگر $\{f_j\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر با مقادیر واقع در $\overline{\mathbb{R}}$ باشد روی (X, \mathcal{M}) باشد، آنگاه توابع زیر همگی

اندازه‌پذیرند:

$$g_1(x) = \sup_j f_j(x), \quad g_+(x) = \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j(x),$$

$$g_-(x) = \inf_j f_j(x), \quad g_-(x) = \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j(x),$$

همگی اندازه‌پذیرند. اگر $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$ برای هر $x \in X$ وجود داشته باشد، آنگاه f اندازه‌پذیرند است.

برهان. داریم:

$$g_1^{-1}((a, \infty]) = \bigcup_j f_j^{-1}((a, \infty]), \quad g_+^{-1}([-\infty, a)) = \bigcup_j f_j^{-1}([-\infty, a)),$$

لذا طبق گزاره ۲.۳ توابع g_1 و g_2 اندازه پذیرند. به طور کلی تر، اگر $h_k(x) = \sup_{j > k} f_j(x)$ ، آنگاه h_k برای هر k اندازه پذیر است، لذا $g_+ = \inf_k h_k$ اندازه پذیر است، و به همین منوال g_+ اندازه پذیر است. بالاخره، اگر f وجود داشته باشد، آنگاه $g_+ = g_- = f$ ، در نتیجه f اندازه پذیر است. ■

۲.۸ نتیجه. اگر $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ اندازه پذیر باشند، آنگاه $\max(f, g)$ و $\min(f, g)$ اندازه پذیرند.

۲.۹ نتیجه. اگر $\{f_j\}$ دنباله ای از توابع اندازه پذیر با مقادیر مختلط باشد و $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$ برای هر x وجود داشته باشد، آنگاه f اندازه پذیر است.

برهان. نتیجه ۲.۵ را به کار برید. ■

به عنوان آخرین آشنایی، دو تجزیه مفید از توابع را ارائه می دهیم. اول اینکه، اگر $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ، قسمت های مثبت و منفی f را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), f^-(x) = \max(-f(x), 0).$$

در این صورت $f = f^+ - f^-$. چنانچه f اندازه پذیر باشد، بنا بر نتیجه ۲.۸ هر دوی f^+ و f^- اندازه پذیرند. دوم اینکه، اگر $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ تجزیه قطبی آن را داریم:

$$f = (\operatorname{sgn} f)|f|$$

که در آن $\operatorname{sgn} z = \begin{cases} \frac{z}{|z|} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$. باز هم اگر f اندازه پذیر باشد، $|f|$ و $\operatorname{sgn} f$ اندازه پذیرند. در واقع $z \rightarrow |z|$ روی \mathbb{C} پیوسته است و $z \rightarrow \operatorname{sgn} z$ به جز در مبدأ پیوسته است. اگر $U \subset \mathbb{C}$ باز باشد، $\operatorname{sgn}^{-1}(U)$ یا باز است به شکل $V \cup \{0\}$ است که در آن V باز است، پس sgn برل اندازه پذیر است. بنابراین $|f| = 1 \circ f$ و $\operatorname{sgn} f = \operatorname{sgn} \circ f$ اندازه پذیرند.

اکنون در مورد توابعی بحث می کنیم که سنگ بناهای نظریه انتگرال گیری هستند. فرض کنید (X, \mathcal{M}) یک فضای اندازه پذیر باشد. اگر $E \subset X$ ، تابع مشخص χ_E از E (که گاهی تابع شاخص E نامیده شده و با $\mathbb{1}_E$ نشان داده می شود) به صورت زیر تعریف می شود.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E, \\ 0 & x \notin E. \end{cases}$$

به آسانی بررسی می شود که χ_E اندازه پذیر است اگر و فقط اگر $E \in \mathcal{M}$.

یک تابع ساده روی X عبارت است از یک ترکیب خطی متناهی با ضرایب مختلط از توابع مشخصه مجموعه‌های واقع در \mathcal{M} . فرض می‌کنیم که توابع ساده مقادیر $\pm\infty$ را هم می‌توانند اختیار کنند. به طور معادل، $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ ساده است اگر و فقط اگر f اندازه‌پذیر باشد و برد f زیر مجموعه‌ای متناهی از \mathbb{C} باشد. در واقع، داریم:

$$f = \sum_{j=1}^n z_j \chi_{E_j}$$

که در آن $E_j = f^{-1}(\{z_j\})$ و برد f مجموعه $\{z_1, \dots, z_n\}$ می‌باشد. این نمایش را نمایش استاندارد f می‌نامیم. این نمایش، f را به صورت یک ترکیب خطی با ضرایب متمایز از توابع مشخصه مجموعه‌های مجزایی بیان می‌کند که اجتماعشان X است. تذکر: یکی از ضرایب z_j می‌تواند ۰ باشد، جمله $z_j \chi_{E_j}$ هنوز می‌تواند به عنوان بخشی از نمایش استاندارد تلقی شود، چون وقتی f با توابع دیگر تعامل می‌کند مجموعه E_j می‌تواند نقش داشته باشد. واضح است که اگر f و g دو تابع ساده باشند $f + g$ و fg نیز چنین‌اند. اکنون نشان می‌دهیم که هر تابع اندازه‌پذیر دلخواه را می‌توان به خوبی با توابع ساده تقریب زد.

۲.۱۰ قضیه. فرض کنید (X, \mathcal{M}) یک فضای اندازه‌پذیر باشد.

الف) چنانچه $f: X \rightarrow [0, \infty]$ اندازه‌پذیر باشد، دنباله‌ای چون $\{\phi_n\}$ از توابع ساده وجود دارد به طوری که $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq f$ و به طور نقطه‌ای $\phi_n \rightarrow f$ و به طور یکنواخت بر هر مجموعه‌ای که f روی آن کراندار است.

ب) چنانچه $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ اندازه‌پذیر باشد، دنباله‌ای چون $\{\phi_n\}$ از توابع ساده وجود دارد به طوری که $0 \leq |\phi_1| \leq |\phi_2| \leq \dots \leq |f|$ و به طور نقطه‌ای، $\phi_n \rightarrow f$ و به طور یکنواخت بر هر مجموعه‌ای که f روی آن کراندار است.

برهان. الف) به ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ و $0 \leq k \leq 2^n - 1$ قرار می‌دهیم:

$$E_n^k = f^{-1}((2^{-n}k, 2^{-n}(k+1)]), \quad F_n = f^{-1}((2^{-n}, \infty]).$$

و تعریف می‌کنیم:

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-n} k \chi_{E_n^k} + 2^n \chi_{F_n}.$$

(این فرمول در نوشتن گیج کننده است اما از نظر هندسی به آسانی قابل فهم است؛ شکل ۲.۱ را ببینید). به آسانی معلوم می‌شود که به ازای هر n ، $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ و $0 \leq f - \phi_n \leq 2^{-n}$ بر مجموعه‌ای که $f \leq 2^n$. بنابر این، حکم حاصل می‌شود.

(ب) چنانچه $f = g + ih$ ، قسمت (الف) را می‌توانیم برای بخش‌های مثبت و منفی g و h به کار برده و دنباله‌هایی مانند ψ_n^+ ، ψ_n^- ، ζ_n^+ و ζ_n^- از توابع ساده نامنفی به دست آوریم که به g^+ ، g^- ، h^+ و h^- صعود کنند. فرض می‌کنیم $\phi_n = \psi_n^+ - \psi_n^- + i(\zeta_n^+ - \zeta_n^-)$ ؛ در این صورت بررسی اینکه ϕ_n خواص مطلوب را دارد تمرین ساده‌ای است. ■

چنانچه μ یک اندازه روی (X, \mathcal{M}) باشد، می‌توان توقع داشت که در بحث توابع اندازه‌پذیر مجموعه‌های μ - پوچ را مستثنی کنیم. با این کار در صورت کامل بودن μ همه چیز آسان‌تر می‌شود.

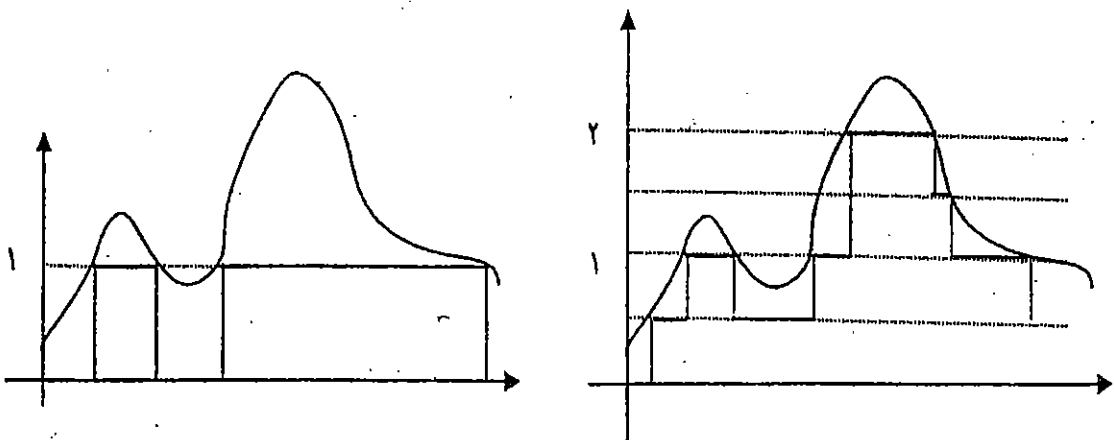
۲.۱۱ گزاره. استنتاج‌های زیر معتبرند اگر و فقط اگر اندازه μ کامل باشد:

(الف) اگر f اندازه‌پذیر باشد و $g = f$ (ت. ه. μ)، آنگاه g اندازه‌پذیر است.

(ب) اگر f_n به ازای $n \in \mathbb{N}$ اندازه‌پذیر باشد و $f_n \rightarrow f$ (ت. ه. μ)، آنگاه f اندازه‌پذیر است.

برهان برای خواننده باقی می‌ماند (تمرین ۱۰).

از سوی دیگر نتیجه زیر نشان می‌دهد که با فراموشی کامل بودن اندازه بعید است که مرتکب اشتباه بزرگی شویم.



شکل ۲.۱ توابع ϕ_0 (چپ) و ϕ_1 (راست) در برهان قسمت (الف) از قضیه ۲.۱۰.

۲.۱۲ گزاره. فرض کنیم (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای اندازه باشد و $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ کامل شده آن باشد. چنانچه f یک تابع $\overline{\mathcal{M}}$ -

اندازه‌پذیر روی X باشد، تابع \mathcal{M} - اندازه‌پذیری مانند g وجود دارد به طوری که $f = g$ (ت. ه. μ).

برهان. اگر $f = \chi_E$ که در آن $E \in \overline{\mathcal{M}}$ بنا بر تعریف حکم واضح است؛ در نتیجه اگر f یک تابع ساده $\overline{\mathcal{M}}$ - اندازه‌پذیر

باشد حکم واضح خواهد بود. برای حالت کلی دنباله‌ای مانند $\{\phi_n\}$ از توابع ساده $\overline{\mathcal{M}}$ - اندازه‌پذیر انتخاب می‌کنیم، که مطابق با

قضیه ۲.۱۰ به طور نقطه‌ای به f بگردید و به ازای هر n فرض می‌کنیم ψ_n یک تابع ساده \mathcal{M} -اندازه‌پذیر باشد که $\psi_n = \phi_n$ به جز روی یک مجموعه مانند \overline{M} با $E_n \in \overline{M}$ با $\mu(E_n) = 0$ برقرار باشد. $N \in \mathcal{M}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\mu(N) = 0$ و $N \supset \bigcup_1^\infty E_n$ ، و قرار می‌دهیم $\psi_n \chi_{X \setminus N} = g$. در این صورت بنا بر نتیجه ۲.۹، تابع g ، \mathcal{M} -اندازه‌پذیر است و $g = f$ بر N^c . ■

تمرین‌ها

در تمرین‌های ۱ تا ۷، (X, \mathcal{M}) یک فضای اندازه‌پذیر است.

(۱) اگر $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ و $Y = f^{-1}(\mathbb{R})$ ، آنگاه f اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{M}$ و $f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{M}$ روی Y اندازه‌پذیر باشد.

(۲) فرض کنید $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ اندازه‌پذیر باشند.

الف) f, g اندازه‌پذیر است (که در آن $0 \cdot (\pm\infty) = 0$).

ب) $a \in \overline{\mathbb{R}}$ را ثابت در نظر گرفته و h را چنین تعریف کنید: $h(x) = a$ هرگاه $f(x) = -g(x) = \pm\infty$ و در

غیر این صورت $h(x) = f(x) + g(x)$. در این صورت h اندازه‌پذیر است.

(۳) اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر روی X باشد، آنگاه $\lim f_n(x)$ وجود دارد: $\{x\}$ یک مجموعه اندازه‌پذیر است.

(۴) اگر $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ و به ازای هر $r \in \mathbb{Q}$ داشته باشیم $f^{-1}((r, \infty]) \in \mathcal{M}$ ، آنگاه f اندازه‌پذیر است.

(۵) اگر $X = A \cup B$ که در آن $A, B \in \mathcal{M}$ ، آنگاه تابعی چون f بر X اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر f هم بر A و هم بر

B اندازه‌پذیر باشد.

(۶) سوپریم خانواده‌ای شمارش‌ناپذیر از توابع $\overline{\mathbb{R}}$ -مقدار روی X نمی‌تواند اندازه‌پذیر نباشد. (مگر اینکه σ -جبر \mathcal{M} بسیار

خاص باشد.)

(۷) فرض کنید به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ مجموعه‌ای چون $E_\alpha \in \mathcal{M}$ داده شده است به طوری که اگر $\alpha < \beta$ ، $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} E_\alpha = \emptyset$ و $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} E_\alpha = X$ ، آنگاه $E_\alpha \subset E_\beta$. در این صورت تابع اندازه‌پذیری چون $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر α ، $E_\alpha \subset \{x: f(x) \leq \alpha\}$ و $E_\alpha^c \subset \{x: f(x) \geq \alpha\}$. (تمرین ۴ را به کار ببرید).

(۸) اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یکنوا باشد، آنگاه f اندازه‌پذیر برل است.

(۹) فرض کنید $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ تابع کانتور (بند ۵.۱) باشد، و $g(x) = f(x) + x$ (الف) g یک دو سوئی از $[0, 1]$ به $[0, 2]$ است و $h = g^{-1}$ از $[0, 2]$ به $[0, 1]$ پیوسته است.

(ب) اگر C مجموعه کانتور باشد، آنگاه $m(g(C)) = 1$.

(ج) بنابر تمرین ۲۹ از فصل ۱، $g(C)$ شامل مجموعه‌ای چون A است که اندازه‌پذیر لبگ نیست. قرار دهید $B = g^{-1}(A)$. در این صورت B اندازه‌پذیر لبگ است اما اندازه‌پذیر برل نیست.

(د) یک تابع اندازه‌پذیر لبگ مانند F و تابع پیوسته‌ای چون G بر \mathbb{R} وجود دارد به طوری که $F \circ G$ اندازه‌پذیر لبگ نیست.

(۱۰) گزاره ۲.۱۱ را ثابت کنید.

(۱۱) فرض کنید f تابعی روی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ باشد به طوری که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x, \cdot)$ اندازه‌پذیر برل است و به ازای هر $y \in \mathbb{R}^k$ ، $f(\cdot, y)$ پیوسته است. به ازای $n \in \mathbb{R}$ تابع f_n را به صورت زیر تعریف کنید. به ازای $i \in \mathbb{Z}$

فرض کنید $a_i = \frac{i}{n}$ و به ازای $a_i \leq x \leq a_{i+1}$ قرار دهید:

$$f_n(x, y) = \frac{f(a_{i+1}, y)(x - a_i) - f(a_i, y)(x - a_{i+1})}{a_{i+1} - a_i}$$

در این صورت f_n بر $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ اندازه‌پذیر برل است و $f_n \rightarrow f$ به طور نقطه‌ای؛ از این رو f بر $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ اندازه‌پذیر برل است. به استقرا نتیجه بگیرید که هر تابع روی \mathbb{R}^n که به طور جداگانه نسبت به هر یک از متغیرهایش پیوسته باشد اندازه‌پذیر برل است.

۲.۲ انتگرال گیری روی توابع نامنفی

در این بخش یک فضای اندازه مانند (X, \mathcal{M}, μ) را ثابت در نظر گرفته و L^+ را فضای همه توابع اندازه‌پذیر از X بتوی $[0, \infty]$ تعریف می‌کنیم. چنانچه ϕ تابعی ساده در L^+ را نمایش استاندارد $\phi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$ باشد انتگرال ϕ نسبت

به μ را با $\int \phi d\mu = \sum_1^n a_j \mu(E_j)$ تعریف می‌کنیم (مثل همیشه برای مصلحت $0 \cdot \infty = 0$). توجه داریم که $\int \phi d\mu$ ممکن است ∞ باشد. چنانچه بیم ابهام نرود به جای $\int \phi d\mu$ ، $\int \phi$ نیز خواهیم نوشت. همچنین گاهی از اوقات بهتر است آرگمان ϕ را صریحاً قید کنیم، بالاخص وقتی $\phi(x)$ توسط ضابطه‌ای بر حسب x داده شود یا وقتی متغیرهای دیگر دخیل باشند؛ در این حالت از نماد $\int \phi(x) d\mu(x)$ استفاده خواهیم کرد. (برخی از مؤلفان ترجیح می‌دهند به جای نماد مذکور بنویسند $(\int \phi(x) \mu(dx))$ بالاخره اگر $A \in \mathcal{M}$ ، آنگاه $\phi \chi_A$ نیز ساده است (مختصر شده $\phi \chi_A = \sum a_j \chi_{A \cap E_j}$) و $\int_A \phi d\mu$ یا $\int_A \phi$ یا $\int \phi \chi_A d\mu$ تعریف می‌کنیم. همین مصلحت‌های نمادی در مورد انتگرال توابع کلی‌تر نیز به کار خواهند رفت تا انتگرال‌ها روی زیرمجموعه‌ها هم تعریف شوند. به‌طور خلاصه:

$$\int_A \phi d\mu = \int_A \phi = \int_A \phi(x) d\mu(x) = \int \phi \chi_A d\mu, \quad \int = \int_X$$

۲.۱۳ گزاره. فرض کنیم ϕ و ψ توابعی ساده در L^+ باشند.

(الف) اگر $c \geq 0$ ، $\int c\phi = c \int \phi$.

(ب) $\int (\phi + \psi) = \int \phi + \int \psi$.

(ج) اگر $\phi \leq \psi$ ، آنگاه $\int \phi \leq \int \psi$.

(د) نگاشت $A \mapsto \int_A \phi d\mu$ یک اندازه روی \mathcal{M} است.

برهان. (الف) بدیهی است. برای (ب) فرض می‌کنیم $\sum_1^m b_k \chi_{F_k}$ و $\sum_1^n a_j \chi_{E_j}$ نمایش‌های استاندارد ϕ و ψ باشند.

در این صورت $E_j = \bigcup_{k=1}^m (E_j \cap F_k)$ و $F_k = \bigcup_{j=1}^n (E_j \cap F_k)$ زیرا $F_k = \bigcup_{j=1}^n E_j = X$ و این اجتماع‌ها مجزا هستند. از این رو جمعی متناهی بودن μ ایجاب می‌کند که

$$\int \phi + \int \psi = \sum_{j,k} (a_j + b_k) \mu(E_j \cap F_k),$$

و همین استدلال نشان می‌دهد که مجموع سمت راست با $\int (\phi + \psi)$ برابر است. به علاوه اگر $\phi \leq \psi$ ، آنگاه وقتی

لذا $a_j \leq b_k$ ، $E_j \cap F_k \neq \emptyset$

$$\int \phi = \sum_{j,k} a_j \mu(E_j \cap F_k) \leq \sum_{j,k} b_k \mu(E_j \cap F_k) = \int \psi,$$

و این مطلب قسمت (ج) را بالاخره اگر $\{A_k\}$ دنباله‌ای مجزا در \mathcal{M} باشد و $A = \bigcup_1^\infty A_k$ ، آنگاه

$$\int_A \phi = \sum_j a_j \mu(A \cap E_j) = \sum_{j,k} a_j \mu(A_k \cap E_j) = \sum_k \int_{A_k} \phi,$$

که این هم (د) را اثبات می کند. ■

حال با تعریف زیر انتگرال را به هر تابع مانند $f \in L^+$ گسترش می دهیم:

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int \phi d\mu : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ ساده است} \right\}.$$

بنابر گزاره ۲.۱۳، وقتی f ساده باشد دو تعریف $\int f$ بر هم منطبق می شوند زیرا خانواده توابع ساده‌ای که روی آن سوپریم گرفته می شود شامل خود f است. به علاوه از تعریف واضح است که اگر $f \leq g$ ، آنگاه $\int f \leq \int g$ و به ازای هر $c \in [0, \infty]$ داریم:

$$\int cf = c \int f.$$

مرحله بعدی اثبات یکی از قضایای اساسی همگرایی است.

۲.۱۴ قضیه همگرایی یکنوا. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای در L^+ باشد به طوری که به ازای هر n ، $f_n \leq f_{n+1}$ و $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n$ ، آنگاه $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n (= \sup_n f_n)$

برهان. $\{ \int f_n \}$ دنباله‌ای صعودی از اعداد است، پس حد آن وجود دارد (ممکن است مساوی ∞ باشد). به علاوه، به ازای هر n ، $\int f_n \leq \int f$ ، لذا $\lim \int f_n \leq \int f$. برای اثبات نامساوی عکس، $\alpha \in (0, 1)$ را ثابت گرفته، فرض می کنیم ϕ تابع ساده‌ای باشد که $0 \leq \phi \leq f$ و $E_n = \{x : f_n(x) \geq \alpha \phi(x)\}$. در این صورت $\{E_n\}$ دنباله‌ای صعودی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر است که اجتماعشان X می باشد، پس داریم $\int f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \alpha \int_{E_n} \phi$. بنابر قسمت (د) از گزاره ۲.۱۳ و قسمت (ج) از قضیه ۱.۸، $\lim \int_{E_n} \phi = \int \phi$ و از این رو $\lim \int f_n \geq \alpha \int \phi$. چون این مطلب در مورد هر $\alpha < 1$ درست است برای $\alpha = 1$ نیز درست باقی می ماند، و با گرفتن سوپریم روی همه توابع ساده $\phi \leq f$ ، به دست می آوریم $\lim \int f_n \geq \int f$. ■

قضیه همگرایی یکنوا در بسیاری از مباحث، یک ابزار اساسی است، اما اهمیت فوری آن برای ما به صورت زیر است. $\int f$ مستلزم سوپریم گیری روی خانواده‌ای بزرگ (معمولاً شمارش ناپذیر) از توابع ساده است، لذا ممکن است محاسبه مستقیم $\int f$ از روی تعریف مشکل باشد. اما قضیه همگرایی یکنوا به ما اطمینان می دهد که برای محاسبه $\int f$ کافی است $\lim \int \phi_n$ را محاسبه کنیم که در آن $\{\phi_n\}$ دنباله‌ای از توابع ساده است که به f صعود می کنند، و قضیه ۲.۱۰ تضمین می کند که چنین دنباله‌ای وجود دارد. به عنوان اولین کاربرد، خاصیت جمعی انتگرال را ثابت می کنیم.

۲.۱۵ قضیه. اگر دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی در L^+ باشد و $f = \sum_n f_n$ ، آنگاه $\int f = \sum_n \int f_n$.

برهان. نخست دو تابع مانند f_1 و f_2 را در نظر می‌گیریم. بنابر قضیه ۲.۱ دنباله‌هایی مانند $\{\phi_j\}$ و $\{\psi_j\}$ از توابع ساده نامنفی می‌توان یافت که به طور صعودی به f_1 و f_2 بگرایند. در این صورت $\{\phi_j + \psi_j\}$ به طور صعودی به $f_1 + f_2$ می‌گراید، لذا بنابر قضیه همگرایی یکنوا و قضیه ۲.۱۳ خواهیم داشت:

$$\int (f_1 + f_2) = \lim \int (\phi_j + \psi_j) = \lim \int \phi_j + \lim \int \psi_j = \int f_1 + \int f_2.$$

بنابر این، با استقرا برای هر عدد طبیعی متناهی N خواهیم داشت:

$$\int \sum_1^N f_n = \sum_1^N \int f_n.$$

با فرض $N \rightarrow \infty$ و با به کارگیری مجدد قضیه همگرایی یکنوا، به دست می‌آوریم:

$$\int \sum_1^\infty f_n = \sum_1^\infty \int f_n. \blacksquare$$

۲.۱۶ گزاره. اگر $f \in L^+$ ، آنگاه $\int f = 0$ اگر و فقط اگر $f = 0$ ت. ه.

برهان. اگر f ساده باشد این مطلب واضح است: اگر $f = \sum_1^n a_j \chi_{E_j}$ که در آن $a_j \geq 0$ ، آنگاه $\int f = 0$ اگر و فقط به ازای هر j یا $a_j = 0$ یا $\mu(E_j) = 0$ در کل، اگر $f = 0$ ت. ه. و ϕ تابعی ساده باشد به طوری که $0 \leq \phi \leq f$ ، آنگاه $\int \phi = 0$ ت. ه. بنابر این $\int f = \sup_{\phi \leq f} \int \phi = 0$ از طرف دیگر، $\int f > 0$ که در آن $E_n = \{x : f(x) > n^{-1}\}$ ، لذا اگر $f = 0$ ت. ه. درست نباشد، آنگاه باید به ازای n ای داشته باشیم $\mu(E_n) > 0$. اما در این صورت $\int f > n^{-1} \mu(E_n) > 0$ ، لذا $f > n^{-1} \chi_{E_n}$. \blacksquare

۲.۱۷ نتیجه. اگر $\{f_n\} \subset L^+$ و $f \in L^+$ و $f_n(x)$ تقریباً برای هر x به $f(x)$ صعود کند، آنگاه

$$\int f = \lim \int f_n.$$

برهان. اگر برای هر $x \in E$ ، $f_n(x)$ به طور صعودی به $f(x)$ بگراید که در آن $\mu(E^c) = 0$ ، آنگاه

$f - f_n \chi_E = 0$ ت. ه. و $\int (f - f_n \chi_E) = 0$ ، لذا بنابر قضیه همگرایی یکنوا خواهیم داشت:

$$\int f = \int f \chi_E = \lim \int f_n \chi_E = \lim \int f_n . \blacksquare$$

فرضیه تقریباً همه جا صعودی بودن دنباله $\{f_n\}$ در قضیه همگرایی یکنوا اساسی است. برای مثال، اگر X همان \mathbb{R} و μ اندازه لِبگ باشد، داریم $\chi_{(n, n+1)} \rightarrow 0$ و $n\chi_{(0, \frac{1}{n})} \rightarrow 0$ به طور نقطه ای، اما برای هر n ،

$$\int \chi_{(n, n+1)} = \int n\chi_{(0, \frac{1}{n})} = 1.$$

همان طور که با رسم نمودار دیده می شود، مشکل این مثال آن است که وقتی $n \rightarrow \infty$ مساحت زیر نمودار «سر از بینهایت در می آورد»، لذا مساحت واقع در حد کمتر از آن چیزی است که تصور می کردیم. این مثال حکایت از آن دارد که در برخی از حالات، انتگرال حد با حد انتگرال یکی نیست، اما در مورد آن هنوز یک نامساوی وجود دارد که معتبر باقی می ماند. این نامساوی را از حکم کلی زیر نتیجه می گیریم.

۲.۱۸. لم فاتو. اگر $\{f_n\}$ دنباله ای در L^+ باشد، آنگاه $\int (\liminf f_n) \leq \liminf \int f_n$.

برهان. برای هر $k \geq 1$ اگر $k \geq j$ داریم $\inf_{n \geq k} f_n \leq f_j$ ، لذا اگر $k \geq j$ ، آنگاه $\int \inf_{n \geq k} f_n \leq \int f_j$ و از

این دو

$$\int \inf_{n \geq k} f_n \leq \inf_{n \geq k} \int f_n.$$

حال فرض می کنیم $k \rightarrow \infty$ و قضیه همگرایی یکنوا را به کار می بریم:

$$\int (\liminf f_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int (\inf_{n \geq k} f_n) \leq \liminf \int f_n . \blacksquare$$

۲.۱۹. نتیجه. اگر $\{f_n\} \subset L^+$ ، $f \in L^+$ و $f_n \rightarrow f$ ، آنگاه $\int f \leq \liminf \int f_n$.

برهان. چنانچه همه جا $f_n \rightarrow f$ ، حکم مستقیماً از لم فاتو حاصل می گردد، اما بنا بر گزاره ۲.۱۶ با دستکاری f_n و f روی یک مجموعه پوچ بدون آنکه تأثیری در انتگرال ها گذارد می توان شرط فوق را برآورده کرد. ■

۲.۲۰. گزاره. اگر $f \in L^+$ و $\int f < \infty$ ، آنگاه $\{x : f(x) = \infty\}$ یک مجموعه پوچ است و $\{x : f(x) > 0\}$

یک مجموعه σ -متناهی می باشد.

برهان به خواننده واگذار می شود (تمرین ۱۲).

تمرین‌ها

(۱۲) گزاره ۲.۲۰ را ثابت کنید. (گزاره ۰.۲۰ را ببینید که در آن یک حالت خاص ثابت شده است).

(۱۳) فرض کنید $\{f_n\} \subset L^+$ ، $f_n \rightarrow f$ به طور نقطه‌ای و $\int f = \lim \int f_n < \infty$. در این صورت برای هر $E \in \mathcal{M}$ ، $\int_E f = \lim \int_E f_n$ ، اما اگر $\int f = \lim \int f_n = \infty$ این حکم لزوماً درست نیست.

(۱۴) چنانچه $f \in L^+$ ، برای هر $E \in \mathcal{M}$ فرض کنید $\lambda(E) = \int_E f d\mu$. در این صورت λ یک اندازه روی \mathcal{M} است و برای هر $g \in L^+$ داریم $\int g d\lambda = \int f g d\mu$. (نخست فرض کنید که g است).

(۱۵) اگر $\{f_n\} \in L^+$ ، f_n نقطه به نقطه به f نزول کند و $\int f_1 < \infty$ ، آنگاه $\int f = \lim \int f_n$.

(۱۶) اگر $f \in L^+$ و $\int f < \infty$ ، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عضوی چون $E \in \mathcal{M}$ وجود دارد به طوری که $\mu(E) < \infty$ و $\int_E f > (\int f) - \varepsilon$.

(۱۷) لم فاتو را مفروض گرفته و قضیه همگرایی یکنوا را از آن نتیجه بگیرید.

۲.۳ انتگرالگیری توابع مختلط

در ادامه بحث، روی فضای ثابتی چون (X, \mathcal{M}, μ) کار می‌کنیم. انتگرالی که در بخش قبل تعریف شد را می‌توان به توابع اندازه‌پذیر با مقادیر حقیقی f به روشنی تعمیم داد؛ یعنی اگر f^+ ، f^- بخش‌های مثبت و منفی f باشند و حداقل یکی از $\int f^+$ و $\int f^-$ متناهی باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\int f = \int f^+ - \int f^-$$

بیشتر به حالتی علاقمند خواهیم بود که $\int f^+$ و $\int f^-$ هر دو متناهی باشند؛ در این صورت می‌گوییم f انتگرال‌پذیر است. چون $|f| = f^+ + f^-$ ، واضح است که f انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر $\int |f| < \infty$.

۲.۲۱ گزاره. مجموعه توابع حقیقی انتگرال پذیر روی X یک فضای برداری حقیقی است، و انتگرال یک تابع خطی روی آن است.

برهان. حکم نخست از این حقیقت حاصل می شود که $|af + bg| \leq |a||f| + |b||g|$ ، و به آسانی معلوم می شود که به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ ، $\int af = a \int f$. برای اثبات جمعی بودن، فرض می کنیم که f, g انتگرال پذیرند و قرار می دهیم $h = f + g$. در این صورت $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ لذا $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$.

بنابر ۲.۱۵

$$\int h^+ + \int f^- + \int g^- = \int h^- + \int f^+ + \int g^+,$$

و با جایگذاری حکم مطلوب به دست می آید:

$$\int h = \int h^+ - \int h^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^- = \int f + \int g. \blacksquare$$

حال اگر f یک تابع اندازه پذیر مختلط باشد، f را انتگرال پذیر گوئیم هرگاه $\int |f| < \infty$. به طور کلی، اگر $E \in \mathcal{M}$ ، f روی E انتگرال پذیر است هرگاه $\int_E |f| < \infty$. چون $|f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f| \leq 2|f|$ ، انتگرال پذیر است اگر و فقط اگر $\operatorname{Re} f$ و $\operatorname{Im} f$ هر دو انتگرال پذیر باشند، و در این حالت تعریف می کنیم:

$$\int f = \int \operatorname{Re} f + i \int \operatorname{Im} f.$$

به آسانی معلوم می شود که فضای توابع مختلط انتگرال پذیر یک فضای برداری مختلط است و انتگرال روی آن یک تابع خطی مختلط است. این فضا را موقتاً با $L^1(\mu)$ (یا بسته به متن $L^1(X, \mu)$ یا $L^1(X)$) یا به طور خلاصه با L^1 نشان می دهیم. اندیس بالایی ۱ نماد استاندارد است، اما تا فصل ۶ هیچ مفهومی نخواهد داشت.

۲.۲۲ گزاره. اگر $f \in L^1$ ، آنگاه $\left| \int f \right| \leq \int |f|$.

برهان. اگر $\int f = 0$ حکم بدیهی است و اگر f حقیقی باشد تقریباً بدیهی است، زیرا

$$\left| \int f \right| = \left| \int f^+ - \int f^- \right| \leq \int f^+ + \int f^- = \int |f|.$$

اگر f مختلط باشد و $\int f \neq 0$ ، فرض می کنیم $\alpha = \operatorname{sgn}(\int f)$. در این صورت $\alpha \int f = \int \alpha f = \int |\alpha f|$. به ویژه $\int \alpha f$ حقیقی است، لذا

$$\left| \int f \right| = \operatorname{Re} \int \alpha f = \int \operatorname{Re}(\alpha f) \leq \int |\operatorname{Re}(\alpha f)| \leq \int |\alpha f| = \int |f|. \blacksquare$$

۲.۲۳ گزاره

الف) اگر $f \in L$ ، آنگاه $\{x : f(x) \neq 0\}$ یک مجموعه σ -متناهی است.

ب) اگر $f, g \in L$ ، آنگاه برای هر $E \in \mathcal{M}$ اگر $\int_E f = \int_E g$ و فقط اگر $|f - g| = 0$ اگر و فقط اگر

$$f = g \text{ ت. ه.}$$

برهان. الف) و هم ارزی دوم در (ب) از گزاره‌های ۲.۲۰ و ۲.۱۶ حاصل می‌شوند. اگر $|f - g| = 0$ ، آنگاه بنا بر گزاره

۲.۲۲ برای $E \in \mathcal{M}$

$$\left| \int_E f - \int_E g \right| \leq \int \chi_E |f - g| \leq \int |f - g| = 0,$$

لذا $\int_E f = \int_E g$ از سوی دیگر، اگر $u = \operatorname{Re}(f - g)$ ، $v = \operatorname{Im}(f - g)$ و $f = g$ ت. ه. درست نباشد، آنگاه

حداقل یکی از u^+ ، u^- ، v^+ و v^- باید روی مجموعه‌ای با اندازه مثبت ناصفر باشد. اگر مثلاً $E = \{x : u^+(x) > 0\}$ اندازه مثبت داشته باشد، آنگاه $0 < \int_E u^+ = \operatorname{Re}(\int_E f - \int_E g) = \int_E u^+ = 0$ زیرا $u^- = 0$ بر E ؛ حالات دیگر نیز همین طور

هستند. ■

این گزاره نشان می‌دهد که اگر توابع را روی مجموعه‌های پوچ تغییر دهیم بر انتگرال ذکر شده در گزاره تأثیری نمی‌گذارد. در واقع می‌توان از توابعی چون f انتگرال گرفت که فقط روی مجموعه اندازه‌پذیری چون E تعریف شده است که متمم آن پوچ است، به سادگی این کار با صفر (یا هر چیز دیگر) تعریف کردن f بر E^c انجام می‌شود. در این روش، به منظور انتگرالگیری، توابع با مقادیر واقع در $\overline{\mathbb{R}}$ را می‌توان با مقادیر حقیقی تلقی کرد. با به‌خاطر سپردن این موضوع، تعریف مناسب‌تری برای $L^1(\mu)$ می‌یابیم. $L^1(\mu)$ مجموعه رده‌های هم‌ارزی توابع انتگرال‌پذیری است که تقریباً همه‌جا بر X تعریف شده‌اند، و در آن f و g هم‌ارزند اگر و فقط اگر $f = g$ ت. ه. هنوز هم فضای جدید $L^1(\mu)$ (تحت جمع تقریباً همه‌جایی نقطه‌ای و ضرب اسکالر نقطه‌ای) یک فضای برداری مختلط است. هر چند از این پس $L^1(\mu)$ را به شکل فضایی از رده‌های هم‌ارزی خواهیم دید، هنوز نماد « $f \in L^1(\mu)$ » را به این معنی به کار خواهیم برد که f یک تابع انتگرال‌پذیر تقریباً همه‌جا تعریف شده می‌باشد. این سوء استفاده از نماد عرفاً پذیرفته شده است و حقیقاً مسبب هر اشتباهی است.

تعریف جدید $L^1(\mu)$ دو مزیت عمده دارد. اول اینکه، اگر $\overline{\mu}$ کامل باشد، گزاره ۲.۱۲ یک تناظر یک به یک طبیعی بین $L^1(\mu)$ و $L^1(\overline{\mu})$ به دست می‌دهد، لذا می‌توانیم این فضاها را یکی بگیریم (و یکی خواهیم گرفت). دوم اینکه، L^1 با متر $\rho(f, g) = \int |f - g|$ یک فضای متری است. (نامساوی مثلثی به آسانی بررسی می‌شود و به وضوح $\rho(f, g) = \rho(g, f)$ ؛ اما برای اثبات « $\rho(f, g) = 0$ فقط اگر $f = g$ » باید توابعی را که تقریباً همه‌جا با هم برابرند مطابق قسمت (ب) از گزاره ۲.۲۳، یکی گرفت). از همگرایی نسبت به این متر تحت عنوان همگرایی در L^1 یاد خواهیم کرد؛ بنا بر این $f_n \rightarrow f$ در L^1 اگر و فقط اگر $\int |f_n - f| \rightarrow 0$

اکنون آخرین قضیه همگرایی اساسی از سه قضیه را می‌آوریم (دو قضیه دیگر قضیه همگرایی یکنوا و لم فاتو می‌باشند) و از آن چند نتیجه مفید استخراج می‌کنیم. در بحث مربوط به انتگرال گیری روی \mathbb{R} با اندازه لبگ همانند بحث ماقبل لم فاتو، ایده و رای قضیه آن است که اگر $f_n \rightarrow f$ و نمودار $|f_n|$ به ناحیه‌ای از صفحه با مساحت متناهی محصور بوده و در نتیجه مساحت بلینی آن نتواند به بینهایت برود، آنگاه $\int f_n \rightarrow \int f$.

۲.۲۴ قضیه همگرایی مغلوب. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای در L^1 باشد به طوری که (الف) $f_n \rightarrow f$ و (ب) عضوی منفی مانند $g \in L^1$ وجود داشته باشد به طوری که $f_n \rightarrow f$ به ازای هر n برقرار باشد. در این صورت

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n.$$

برهان. بنابر گزاره‌های ۲.۱۱ و ۲.۱۲ تابع f (شاید پس از تعریف مجدد روی یک مجموعه پوچ) اندازه پذیر است و چون $f_n \rightarrow f$ داریم $f \in L^1$ با در نظر گرفتن بخش‌های حقیقی و موهومی، کافی است فرض کنیم که f_n و f حقیقی هستند، که در این حالت داریم $g + f_n \geq 0$ و $g - f_n \geq 0$ بنابر لم فاتو داریم:

$$\int g + \int f \leq \liminf \int (g + f_n) = \int g + \liminf \int f_n$$

$$\int g - \int f \leq \liminf \int (g - f_n) = \int g - \limsup \int f_n.$$

بنابر این $\liminf \int f_n \geq \limsup \int f_n$ و حکم حاصل می‌شود. ■

۲.۲۵ قضیه. فرض کنیم $\{f_j\}$ دنباله‌ای در L^1 باشد به طوری که $\sum_1^\infty \int |f_j| < \infty$. در این صورت $\sum_1^\infty f_j$ تقریباً همه جا به تابعی در L^1 همگرا است و $\int \sum_1^\infty f_j = \sum_1^\infty \int f_j$.

برهان. بنابر قضیه ۲.۱۵، $\int \sum_1^\infty |f_j| = \sum_1^\infty \int |f_j| < \infty$ ، لذا تابع $g = \sum_1^\infty |f_j|$ در L^1 است. به ویژه، بنابر گزاره ۲.۲۰، $\sum_1^\infty |f_j|(x)$ تقریباً برای همه x ‌ها متناهی است و برای چنین x ‌هایی سری $\sum_1^\infty f_j(x)$ همگرا است. به علاوه، به ازای همه n ‌ها داریم $|\sum_1^n f_j| \leq g$. پس می‌توان قضیه همگرایی مغلوب را در مورد مجموعه‌های جزئی به کار برده و به تساوی $\int \sum_1^\infty f_j = \sum_1^\infty \int f_j$ دست یافت. ■

۲.۲۶ قضیه. چنانچه $f \in L^1(\mu)$ و $\varepsilon > 0$ ، تابع ساده انتگرال پذیری مانند $\phi = \sum a_j \chi_{E_j}$ وجود دارد به طوری که $\int |f - \phi| d\mu < \varepsilon$ (یعنی، توابع ساده انتگرال پذیر، نسبت به متر L^1 در L^1 چگال هستند). چنانچه μ اندازه لبگ - اشتیلیس روی \mathbb{R} باشد، مجموعه‌های E_j واقع در تعریف ϕ را می‌توان اجتماعی متناهی از بازه‌های باز گرفت، به علاوه تابع پیوسته‌ای چون g وجود دارد که بیرون یک بازه کماندار صفر است به طوری که $\int |f - \phi| d\mu < \varepsilon$.

برهان. فرض می‌کنیم $\{\phi_n\}$ مثل قسمت (ب) از قضیه ۲.۱۰ باشد؛ در این صورت بنا بر قضیه همگرایی مغلوب، به ازای n های به قدر کافی بزرگ داریم $\int |\phi_n - f| < \epsilon$ زیرا $\int |\phi_n - f| \leq 2 \int |f| < \epsilon$ اگر $\phi_n = \sum a_j \chi_{E_j}$ که در آن E_j ها مجزا هستند و a_j ها ناصفراند، مشاهده می‌کنیم که

$$\mu(E_j) = |a_j|^{-1} \int_{E_j} |\phi_j| \leq |a_j|^{-1} \int |f| < \infty.$$

به علاوه، اگر E و F مجموعه‌های اندازه‌پذیری باشند، آنگاه داریم $\mu(E \Delta F) = \int |\chi_E - \chi_F|$. از این رو، اگر μ اندازه لیگ - اشتیلیس روی \mathbb{R} باشد، آنگاه بنا بر گزاره ۱.۲۰ می‌توانیم χ_{E_j} را با دقت دل‌خواه بر حسب متر L^1 به وسیله مجموع‌هایی متناهی از توابع χ_{I_k} تقریب بزنیم که در آن I_k ها بازه‌هایی باز هستند. بالاخره، اگر $I_k = (a, b)$ می‌توانیم بر حسب متر L^1 تابع χ_{I_k} را به وسیله توابع پیوسته‌ای که خارج از (a, b) صفر هستند تقریب بزنیم. (به عنوان مثال، برای عدد مفروض $\epsilon > 0$ ، $g, \epsilon > 0$ را تابع پیوسته‌ای می‌گیریم که روی $(-\infty, a]$ و $[b, \infty)$ مساوی با ۰ و روی $[a + \epsilon, b - \epsilon]$ مساوی ۱ و روی $[a, a + \epsilon]$ و $[b - \epsilon, b]$ خطی است.) با تلفیق این حقایق، احکام مطلوب را به دست می‌آوریم. ■

قضیه بعدی محکی برای اعتبار تعویض ترتیب انجام یک حد یا یک مشتق با انتگرال به دست می‌دهد که قدری محدودتر از آنهایی است که در اکثر کتاب‌های حسابان پیشرفته یافت می‌شود.

۲.۲۷ قضیه. فرض کنیم $f: X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ($-\infty < a < b < \infty$) و به ازای هر $t \in [a, b]$ تابع $f: (, t) \rightarrow \mathbb{C}$ انتگرال‌پذیر باشد. قرار می‌دهیم:

$$F(t) = \int_X f(x, t) d\mu(x).$$

الف) فرض کنیم عضوی چون $g \in L^1(\mu)$ وجود دارد به طوری که $|f(x, t)| \leq g(x)$ به ازای هر t و x برقرار است. اگر به ازای هر x ، $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = f(x, t_0)$ ، آنگاه $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0)$ ؛ به ویژه، اگر به ازای هر x ، $f(x, \cdot)$ پیوسته باشد،

آنگاه F پیوسته است.

ب) فرض کنیم $\frac{\partial f}{\partial t}$ موجود و عضوی چون $g \in L^1(\mu)$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر t و x داشته باشیم:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x).$$

در این صورت F مشتق‌پذیر است و $F'(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$

برهان. برای (الف)، قضیه همگرایی مغلوب را در مورد $f_n(x) = f(x, t_n)$ به کار برید که در آن دنباله‌ای دل‌خواه در $[a, b]$ است که به t_0 همگرا است. برای (ب) ملاحظه می‌کنیم که $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) = \lim h_n(x)$ که در آن

$$h_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0},$$

باز هم $\{t_n\}$ دنباله‌ای دل‌خواه است که به t_0 همگرا است. نتیجه می‌گیریم که $\frac{\partial f}{\partial t}$ اندازه‌پذیر است و بنابر قضیه مقدار میانی،

$$|h_n(x)| \leq \sup_{t \in [a, b]} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x),$$

پس می‌توانیم قضیه همگرایی مغلوب را بار دیگر فراخوانده و به دست آوریم:

$$F'(t_0) = \lim \frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \lim \int h_n(x) d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) d\mu(x). \blacksquare$$

اندیشه به کارگیری دنباله‌های همگرا به t_0 در برهان قبل، از لحاظ فنی لازم است زیرا قضیه همگرایی مغلوب فقط با دنباله‌هایی از توابع کار می‌کند، اما در چنین مواردی معمولاً فقط خواهیم گفت «فرض کنیم $t_0 \rightarrow t$ » به این مفهوم که همگرایی دنباله‌ای زیر آرگمان است.

توجه به این نکته مهم است که در قضیه ۲.۲۷ بازه $[a, b]$ که روی آن برآورد f یا $\frac{\partial f}{\partial t}$ برقرار است باید زیربازه سره‌ای از یک بازه مانند I (شاید خود \mathbb{R}) باشد که روی آن $f(x, \cdot)$ تعریف شود. چنانچه مفروضات (الف) یا (ب) (شاید با تابع غالب g که به a و b وابسته است) به ازای هر $[a, b]$ برقرار باشند، پیوستگی یا مشتق‌پذیری تابع انتگرال F بر سراسری I به دست می‌آید چرا که این خواص طبیعاً موضعی هستند.

در حالت خاص که اندازه μ اندازه لبگ روی \mathbb{R} است، انتگرالی که معرفی کردیم انتگرال لبگ نامیده می‌شود. با این تفاسیر، مطالعه رابطه بین انتگرال‌های ریمان و لبگ بر \mathbb{R} لازم می‌آید. توصیف داربوک از انتگرال ریمان برحسب مجموع‌های بالایی و پایینی را به کار خواهیم برد که هم اکنون آن را یادآوری می‌کنیم.

فرض کنیم $[a, b]$ یک بازه فشرده باشد. یک افراز از $[a, b]$ را به معنی دنباله‌ای متناهی مانند $P = \{t_j\}_0^n$ خواهیم گرفت به طوری که $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. فرض می‌کنیم f تابع حقیقی کراندار دل‌خواهی روی $[a, b]$ است. برای هر افرازی مانند P تعریف می‌کنیم:

$$S_P f = \sum_{j=1}^n M_j (t_j - t_{j-1}), \quad s_P f = \sum_{j=1}^n m_j (t_j - t_{j-1}),$$

که در آن M_j و m_j سوپرمم و اینفیمم f روی $[t_{j-1}, t_j]$ است. سپس تعریف می‌کنیم

$$\bar{I}_a^b(f) = \inf_P S_P(f), \quad \underline{I}_a^b(f) = \sup_P s_P(f).$$

که در آن اینفیمم و سوپرمم روی همهٔ افرازهای P گرفته می‌شود. اگر $\bar{I}_a^b(f) = \underline{I}_a^b(f)$ ، مقدار مشترک آنها انتگرال ریمان $\int_a^b f(x)dx$ است و f را انتگرال پذیر ریمان می‌نامیم.

۲.۲۸ قضیه. فرض کنیم f تابع حقیقی کرانداری بر $[a, b]$ باشد.

(الف) اگر f انتگرال پذیر ریمان باشد، آنگاه f اندازه پذیر لیگ است (از این رو f روی $[a, b]$ انتگرال پذیر است زیرا کرانداز

$$\text{است) و } \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f dm$$

(ب) f انتگرال پذیر ریمان است اگر و فقط اگر $\{f\}$ در x ناپیوسته است: $\{x \in [a, b] : \dots\}$ دارای اندازه لیگ صفر می‌باشد.

برهان. فرض کنیم f انتگرال پذیر ریمان باشد. به ازای هر افراز مانند P (با نمادهای فوق)، قرار می‌دهیم:

$$G_P = \sum_{j=1}^n M_j \chi_{(t_{j-1}, t_j]} \quad , \quad g_P = \sum_{j=1}^n m_j \chi_{(t_{j-1}, t_j]}$$

لذا $S_P f = \int g_P dm$ و $s_P f = \int G_P dm$. دنباله‌ای چون $\{P_k\}$ از افرازهای وجود دارد که هیچ آنها (یعنی، $\max(t_j - t_{j-1})$) به صفر میل می‌کند و هر کدام از آنها شامل قبلی است. (پس g_{P_k} نسبت به k نزولی است در حالی که

G_{P_k} صعودی است)، این دنباله به قسمی است که $s_{P_k} f$ و $S_{P_k} f$ به $\int_a^b f(x)dx$ می‌گرایند. فرض می‌کنیم

$G = \lim G_{P_k}$ و $g = \lim g_{P_k}$ در این صورت $G \leq f \leq g$ و بنا بر قضیه همگرایی مغلوب،

$$\int G dm = \int g dm = \int_a^b f(x)dx$$

در نتیجه $\int (G - g) dm = 0$. پس بنا بر گزاره ۲.۱۶، $G = g$ و لذا $G = f$ است. چون G اندازه پذیر است

(حد دنباله‌ای از توابع ساده است) و m کامل است پس f اندازه پذیر است و

$$\int_{[a,b]} f dm = \int G dm = \int_a^b f(x)dx .$$

این مطلب (الف) را به اثبات می‌رساند و برهان (ب) در تمرین ۲۳ گنجانده شده است. ■

بنا بر این انتگرال ریمان (محض) در انتگرال لیگ گنجدیده است. برخی انتگرال‌های ریمان نامتعارف ناسره (مطلقاً همگرا)

را می‌توان مستقیماً به صورت انتگرال‌های لیگ تعبیر کرد؛ اما سایر انتگرال‌های نامتعارف نیاز به یک فرآیند حدی دارند. برای مثال، اگر به ازای هر $b > 0$ ، f بر $[0, b]$ انتگرال پذیر ریمان باشد و بر $[0, \infty)$ انتگرال پذیر لیگ باشد، آنگاه (بنا بر قضیه

همگرایی مغلوب) $\int_{[0,\infty)} f dm = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x)dx$ ، اما حد سمت راست می‌تواند موجود باشد حتی اگر f انتگرال پذیر

نباشد (مثال: $f = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (-1)^n \chi_{(n, n+1]}$). معمولاً از این پس نماد $\int_a^b f(x)dx$ را برای انتگرال‌های لیگ به کار

خواهیم برد. چند یادآوری در باب مقایسه ساختار انتگرال های ریمنان و لبگ می توان مفید باشد. فرض کنیم f تابع اندازه پذیر کرانداری بر $[a, b]$ باشد، و برای راحتی فرض می کنیم $f \geq 0$. برای محاسبه انتگرال ریمنان f ، دنباله ای از توابع ساده انتخاب می شود که به f صعود کند. به ویژه، اگر دنباله ای انتخاب شود که در برهان قسمت (الف) از قضیه ۲.۱ ساخته شد (شکل ۲.۱ را ببینید)، در عمل برد f را به زیر بازه های $(I_j)^{-1}$ f ای چون I_j افزا کرده و f با ثابتی بر هر یک از مجموعه های $(I_j)^{-1}$ f تقریب زده می شود. شروع این روند به یک نظریه اندازه بسیار قوی نیازمند است زیرا ممکن است مجموعه های $(I_j)^{-1}$ پیچیده باشند حتی اگر f پیوسته است؛ اما بهتر است بر سر تابع خاص مورد نظر f و در نتیجه انعطاف پذیر و مستعدتر نسبت به کلیت، توافق کنیم. (در نظریه لبگ فرض اندازه پذیری f نیاز به در نظر گرفتن هر دو تقریب بالایی و پایینی را مرتفع می سازد؛ اما دیدگاه اخیر را می توان در وضع مجرد نیز به کار انداخت (تمرین ۲۴ را ببینید).

نظریه لبگ دو مزیت بر نظریه ریمنان دارد. نخست، قضایای همگرایی قدرتمند بسیار زیاد، از قبیل قضایای همگرایی مغلوب یکنوا، فراهم می شوند. این نه تنها نتایجی را که قبلاً قابل به دست آوردن بودند را به دست می دهد بلکه حجم اثبات قضایای کلاسیک را کاهش می دهد. دوم اینکه، رده گسترده تری از توابع را می توان انتگرال گیری کرد. برای مثال، اگر R مجموعه اعداد گویای واقع در $[0, 1]$ باشد، χ_R همه جای $[0, 1]$ ناپیوسته است و $\int \chi_R dm = 0$ (واقعا، به مفهومی این مثال، یک مثال بدیهی است زیرا χ_R تقریباً همه جا با تابع ثابت ۰ برابر است، برای دیدن مثال های جالب تر به تمرین ۲۵ مراجعه کنید). البته، حقیقت این است که همه توابعی که در آنالیز کلاسیک به آنها برمی خوریم (موضعا) انتگرال پذیر ریمنان هستند، پس این کلیت اضافه شده عملاً برای محاسبه انتگرال های خاص به کار می رود. اما این نتیجه قاطعی است که فضاهای متری مختلف مرکب از توابعی که مترهای آنها بر حسب انتگرال ها تعریف می شود به هنگامی که توابع انتگرال پذیر لبگ و نه صرفاً انتگرال پذیر ریمنان در نظر گرفته می شوند کامل هستند. این موضوع را بعداً، خصوصاً در فصل ۶، به طور کامل مورد بررسی قرار خواهیم داد. (قبلاً کامل بودن $L^1(\mu)$ را در قالب قضیه ۲.۲۵ ثابت کردیم. (برای ارتقاء سطح، قضیه ۵.۱ را ببینید).

این بخش را با معرفی تابع گامای Γ به پایان می رسانیم، بعداً این تابع در چند مورد نقش بازی می کند. اگر $z \in \mathbb{C}$ و $\text{Re } z > 0$ ، آنگاه $f_z : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ را با $f_z(t) = t^{z-1} e^{-t}$ تعریف می کنیم (در اینجا $t^{z-1} = \exp[(z-1)\log t]$). چون $|t^{z-1}| = t^{\text{Re } z - 1}$ داریم $|f_z(t)| \leq t^{\text{Re } z - 1}$ ، و نیز به ازای $t \geq 1$ $|f_z(t)| \leq C_z e^{-t/2}$ (به آسانی می توان مقدار دقیق C_z با ماکسیم سازی $t^{\text{Re } z - 1} e^{-t/2}$ یافت، اما این کار در اینجا هیچ اهمیتی ندارد) چون $\int_0^1 t^\alpha dt < \infty$ برای هر $\alpha > -1$ برقرار است و $\int_1^\infty t e^{-t/2} dt < \infty$ می بینیم که برای $\text{Re } z > 0$ ، $f_z \in L^1((0, \infty))$ ، f_z تعریف می کنیم:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\text{Re}(z) > 0)$$

از آنجا که بنابر انتگرال گیری جزء به جزء،

$$\int_\epsilon^N t^z e^{-t} dt = -t^z e^{-t} \Big|_\epsilon^N + z \int_\epsilon^N t^{z-1} e^{-t} dt,$$

با فرض $\epsilon \rightarrow 0$ و $N \rightarrow \infty$ می بینیم که به ازای $\text{Re } z > 0$ ، تابع Γ در معادله تابعی

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

صالح می‌کند. بنابراین می‌توان با استفاده از این معادله Γ را (تقریباً) به کل صفحه مختلط توسعه داد. یعنی، برای $-1 < \text{Re } z < 0$ می‌توانیم $\Gamma(z)$ را $\frac{\Gamma(z+1)}{z}$ تعریف کنیم، به طور استقرایی، با داشتن تعریف $\Gamma(z)$ برای $\text{Re } z > -n, \text{Re } z > -n-1$ را برای $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ تعریف می‌کنیم. حاصل کار تابعی است که بز \mathbb{C} به جز برای تکین‌های واقع در اعداد صحیح نامنفی تعریف شده است نقاط تکین به الگوریتم توصیف شده تقسیم بر صفر می‌رسد.

داریم $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1$ ، لذا با n بار استفاده از معادله تابعی معلوم می‌شود که $\Gamma(n+1) = n!$ (برهان دیگری از این حکم در تمرین ۲۹ گنجانده شده است). تعدادی از کاربردهای تابع گاما شامل این حقیقت است که تابع گاما توسیعی از تابع فاکتوریل به اعداد ناصحیح فراهم می‌کند.

تمرین‌ها

۱۸) اگر فرض $f_n \in L^+$ در لم فاتو با این فرض جایگزین شود که « f_n اندازه‌پذیر است و $f_n \geq -g$ که در آن $g \in L^+ \cap L^1$ » باز هم لم فاتو معتبر باقی می‌ماند. مشابه لم فاتو برای توابع نامثبت چیست؟

۱۹) فرض کنید $\{f_n\} \subset L^1(\mu)$ و $f_n \rightarrow f$ به طور یکنواخت.

الف) اگر $\mu(X) < \infty$ ، آنگاه $f \in L^1(\mu)$ و $\int f_n \rightarrow \int f$

ب) اگر $\mu(X) = \infty$ ، حکم (الف) ممکن است نادرست باشد: (مثال‌هایی روی \mathbb{R} با اندازه لیگ بیابید).

۲۰) (یک قضیه همگرایی مغلوب تعمیم یافته) اگر $f, g \in L^1$ ، $f_n, g_n, f, g \in L^1$ ، $f_n \rightarrow f$ ، $g_n \rightarrow g$ ، $|f_n| \leq g_n$ و $\int g_n \rightarrow \int g$ ، آنگاه $\int f_n \rightarrow \int f$. (برهان قضیه همگرایی مغلوب را بازنویسی کنید).

۲۱) فرض کنید $f, f_n \in L^1$ ، $f_n \rightarrow f$ ، $\int |f_n - f| \rightarrow 0$ اگر و فقط اگر $\int |f_n| \rightarrow \int |f|$. (تمرین ۲۰ را به کار ببرید).

۲۲) فرض کنید μ اندازه شمارشی روی \mathbb{N} باشد. لم فاتو و قضایای همگرایی مغلوب و یکنوا را به صورت عباراتی در مورد سری‌های نامتناهی شرح دهید.

(۲۳) تابع کرانداری چون $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ مفروض است، فرض کنید:

$$H(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|y-x| \leq \delta} f(y), \quad h(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{|y-x| \leq \delta} f(y).$$

با اثبات لم هالی-زیر، قسمت (ب) از قضیه ۲.۲۸ را ثابت کنید.

الف) $H(x) = h(x)$ اگر و فقط اگر f در x پیوسته باشد.

ب) با نمادگذاری برهان قسمت (الف) از قضیه ۲.۲۸، $H = G$ و $h = g$. ه.

بنابر این H و h اندازه پذیر لبگ هستند و $\int_{[a,b]} H dm = \bar{I}_a^b(f)$ و $\int_{[a,b]} h dm = \underline{I}_a^b(f)$

(۲۴) فرض کنید (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای اندازه با خاصیت $\mu(X) < \infty$ باشد و $(X, \bar{\mathcal{M}}, \bar{\mu})$ کامل شده آن باشد. فرض کنید

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ کراندار است. در این صورت $f, \bar{\mathcal{M}}$ - اندازه پذیر است (و در نتیجه در $L^1(\bar{\mu})$ واقع است) اگر و فقط اگر

دنباله‌هایی چون $\{\phi_n\}$ و $\{\psi_n\}$ از توابع ساده μ - اندازه پذیر وجود داشته باشد به طوری که $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ و

$$\int \phi_n d\mu = \lim \int \psi_n d\mu = \int f d\bar{\mu} \text{ و } \int (\psi_n - \phi_n) d\mu < n^{-1}$$

(۲۵) فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \notin (0, 1). \end{cases}$ به علاوه، فرض کنید $\{r_n\}_1^\infty$ شمارشی از اعداد گویا باشد قرار دهید:

$$g(x) = \sum_1^\infty 2^{-n} f(x - r_n).$$

الف) $g \in L^1(m)$ و به ویژه $g < \infty$. ه.

ب) در هر نقطه ناپیوسته است و روی هر بازه غیر کراندار است و پس از هر اصلاح روی مجموعه‌ای با اندازه صفر،

غیر کراندار باقی می ماند.

ج) $g^+ < \infty$. ه، اما g^- روی هیچ بازه‌ای انتگرال پذیر نیست.

(۲۶) اگر $f \in L^1(m)$ و $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ ، آنگاه F بر \mathbb{R} پیوسته است.

(۲۷) فرض کنید $f_n^{-\infty}(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$ که در آن $0 < a < b$.

الف) $\sum_1^\infty \int_0^\infty |f_n(x)| dx = \infty$

ب) $\sum_1^\infty \int_0^\infty f_n(x) dx = 0$

ج) $\int_0^\infty \sum_1^\infty f_n(x) dx = \log(\frac{b}{a})$ و $\sum_1^\infty f_n \in L^1([0, \infty), m)$

۲۸) حدهای زیر را محاسبه کرده و درستی محاسبات را توجیه کنید:

الف) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \sin\left(\frac{x}{n}\right) dx$

ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 + nx^x)(1 + x^x)^{-n} dx$

ج) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} n \sin\left(\frac{x}{n}\right) [x(1 + x^x)]^{-1} dx$

د) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} n(1 + n^x x^x)^{-1} dx$ (جواب به این مطلب بستگی دارد به اینکه آیا $a > 0, a = 0$ یا $a < 0$ این

مطلب چگونه با قضیه‌های همگرایی مختلف سازگار است؟)

۲۹) با مشتقگیری از معادله $\int_0^{\infty} e^{-tx} dx = \frac{1}{t}$ نشان دهید که $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$. مشابهاً با مشتقگیری از معادله

تساوی $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{t}}$ نشان دهید که $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = (2n)! \frac{\sqrt{\pi}}{4^n n!}$. (گزاره ۲.۵۳ را ببینید).

۳۰) نشان دهید که $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k x^n (1 - k^{-1}x) dx = n!$

۳۱) با تفکیک انتگرال به یک سری نامتناهی و توجیه جمله به جمله انتگرال، فرمول‌های زیر را به دست آورید. تمرین ۲۹

می‌تواند مفید واقع شود. (توجه: در (د) و (ه) انتگرال گیری جمله به جمله کارساز است و سری حاصل تنها برای $a > 1$ همگرا است، اما فرمول‌های ارائه شده در حقیقت برای $a > 0$ نیز معتبر هستند).

الف) به ازای $a > 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos ax dx = \sqrt{\pi} e^{-\frac{a^2}{4}}$

ب) به ازای $a > -1$ $\int_0^1 x^a (1-x)^{-1} \log x dx = \sum_{k=1}^{\infty} (a+k)^{-1}$

ج) به ازای $a > 1$ $\zeta(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}$ که در آن $\int_0^{\infty} x^{a-1} (e^x - 1)^{-1} dx = \Gamma(a) \zeta(a)$

د) به ازای $a > 1$ $\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{-1} \sin x dx = \arctan(a^{-1})$

ه) به ازای $a > 1$ $\int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(x) dx = (a^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$ که در آن $J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n (n!)^2}$ تابع بسل

مرتبه صفر است.

۲.۴ نوعی از همگرایی

اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع مختلط روی مجموعه‌ای چون X باشد «وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $f_n \Rightarrow f$ » را می‌توان به معانی مختلفی گرفت، برای مثال، می‌توان آن را به معنی همگرایی نقطه به نقطه یا یکنوا گرفت. اگر X یک فضای اندازه باشد، از همگرایی L^1 یا همگرایی در L^1 نیز می‌توان سخن گفت. البته همگرایی یکنوا همگرایی نقطه به نقطه را ایجاب می‌کند که این هم به نوبه خود همگرایی L^1 را ایجاب می‌کند (عکس آن در حالت کلی درست نیست)، اما این قبیل همگرایی، همگرایی L^1 را ایجاب نمی‌کنند یا برعکس. به خاطر سپردن مثال‌های زیر روی \mathbb{R} (با اندازه لبگ) مفید خواهد بود:

$$f_n = n^{-1} \chi_{(0,n)} \quad (\text{الف})$$

$$f_n = \chi_{(n,n+1)} \quad (\text{ب})$$

$$f_n = n \chi_{[0, \frac{1}{n}]} \quad (\text{ج})$$

$$f_5 = \chi_{[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}]} \cdot f_4 = \chi_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]} \cdot f_3 = \chi_{[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]} \cdot f_2 = \chi_{[\frac{1}{2}, 1]} \cdot f_1 = \chi_{[0, 1]} \quad (\text{د})$$

و $f_7 = \chi_{[\frac{2}{7}, \frac{1}{3}]} \cdot f_6 = \chi_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}]} \cdot f_5 = \chi_{[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}]} \cdot f_4 = \chi_{[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]} \cdot f_3 = \chi_{[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]} \cdot f_2 = \chi_{[\frac{3}{4}, 1]} \cdot f_1 = \chi_{[0, 1]}$ که در آن $n = 2^k + j$ و $0 \leq j < 2^k$ در (الف)، (ب) و (ج)، $f_n \rightarrow 0$ به ترتیب به طور یکنواخت، نقطه به نقطه و L^1 ، اما $f_n \not\rightarrow 0 \in L^1$ (در واقع به ازای همه n ها $\int |f_n| = \int f_n = 1$) در (د)، $f_n \rightarrow 0$ در L^1 ، زیرا $\int |f_n| = 2^{-n}$ برای $2^k \leq n < 2^{k+1}$ برقرار است، اما $f_n(x)$ به ازای هر $x \in [0, 1]$ همگرا نیست زیرا تعدادی نامتناهی n وجود دارد که برای آنها $f_n(x) = 0$ و تعدادی نامتناهی از n ها وجود دارد که برای آنها $f_n(x) = 1$ از سوی دیگر اگر $f_n \rightarrow f$ و به ازای همه n ها، $|f_n| \leq g \in L^1$ ، آنگاه $f_n \rightarrow f$ در L^1 . (این مطلب از قضیه همگرایی مغلوب واضح است زیرا $|f_n - f| \leq 2g$). همچنین در زیر خواهیم دید که اگر $f_n \rightarrow f$ در L^1 ، آنگاه زیر دنباله‌ای از $\{f_n\}_1^\infty$ وجود دارد که تقریباً همه جا به f همگرا است.

نوع دیگری از همگرایی که غالباً مورد استفاده است همگرایی در اندازه می‌باشد. دنباله‌ای چون $\{f_n\}$ از توابع مختلط اندازه‌پذیر روی (X, \mathcal{M}, μ) را در اندازه μ گوییم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ وقتی $n, m \rightarrow \infty$ ،

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0,$$

و می‌گوییم در اندازه همگرا به f است هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ وقتی $n \rightarrow \infty$ ،

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0.$$

برای مثال، دنباله‌های (الف)، (ج) و (د) که در فوق ذکر شدند در اندازه به صفر همگرا هستند، اما (ب) در اندازه کشی نیست.

۲.۲۹ گزاره. اگر $f_n \rightarrow f$ در L^1 ، آنگاه در اندازه $f_n \rightarrow f$.

برهان. فرض می‌کنیم $E_{n,\varepsilon} = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ در این صورت

$$\int |f_n - f| \geq \int_{E_{n,\varepsilon}} |f_n - f| \geq \varepsilon \mu(E_{n,\varepsilon})$$

$$\blacksquare \mu(E_{n,\varepsilon}) \leq \varepsilon^{-1} \int |f_n - f| \rightarrow 0 \text{ لذا}$$

همان طور که مثال های (الف) و (ج) نشان می دهند عکس گزاره ۲.۲۹ نادرست است.

۲.۳۰ قضیه. فرض کنیم $\{f_n\}$ در اندازه کشی باشد در این صورت تابعی چون f وجود دارد به طوری که در اندازه، $f_n \rightarrow f$ و زیر دنباله ای چون $\{f_{n_j}\}$ وجود دارد که تقریباً همه جا به f همگرا است. به علاوه اگر در اندازه $g \rightarrow f_n$ ، آنگاه $g = f$. ه .

برهان. می توان زیر دنباله ای مانند $\{g_j\} = \{f_{n_j}\}$ از $\{f_n\}$ انتخاب کرد به طوری که اگر

$$E_j = \{x : |g_j(x) - g_{j+1}(x)| \geq 2^{-j}\}$$

آنگاه $\mu(E_j) \leq 2^{-j}$. اگر $F_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$ ، آنگاه

$$\mu(F_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = 2^{1-k}$$

و چنانچه $x \notin F_k$ ، به ازای $k \geq j \geq i$ داریم:

$$|g_j(x) - g_i(x)| \leq \sum_{l=i}^{j-1} |g_{l+1}(x) - g_l(x)| \leq \sum_{l=i}^{j-1} 2^{-l} \leq 2^{1-j} \quad (۲.۳۱)$$

از این رو $\{g_j\}$ نقطه به نقطه بر F_k^c کشی است. فرض می کنیم $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \limsup E_j$

در این صورت $\mu(F) = 0$ ، و اگر قرار دهیم:

$$f(x) = \begin{cases} \lim g_j(\bar{x}) & x \notin F \\ 0 & x \in F \end{cases}$$

آنگاه f اندازه پذیر است (تمرین های ۳ و ۵) و $g_j \rightarrow f$. ه . همچنین (۲.۳۱) نشان می دهد که به ازای $x \notin F$ و

$j \geq k$ ، $|g_j(x) - f(x)| \leq 2^{1-j}$. چون وقتی $k \rightarrow \infty$ ، $\mu(F_k) \rightarrow 0$ ، نتیجه می گیریم که در اندازه $g_j \rightarrow f$. اما

در این صورت در اندازه $f_n \rightarrow f$ ، زیرا

$$\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset \{x : |f(x) - g_j(x)| \geq \frac{1}{4}\varepsilon\} \cup \{x : |g_j(x) - f(x)| \geq \frac{1}{4}\varepsilon\},$$

و وقتی n و j بزرگ باشند مجموعه های سمت راست هر دو اندازه کوچکی دارند. به طور مشابه، اگر در اندازه $g \rightarrow f_n$ ، آنگاه

به ازای هر n داریم:

$$\{x : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \subset \{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{4}\varepsilon\} \cup \{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{1}{4}\varepsilon\},$$

و در نتیجه، به ازای هر ε ، $\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$ با فرض اینکه ε در قالب دنباله‌ای از مقادیر به صفر میل کند، نتیجه می‌گیریم که $f = g$ ت. ه. ■

۲.۳۲ نتیجه. چنانچه $f_n \rightarrow f$ در L^1 ، دنباله‌ای چون $\{f_{n_j}\}$ وجود دارد به طوری که $f_{n_j} \rightarrow f$ ت. ه.

برهان. گزاره ۲.۲۹ و قضیه ۲.۳۰ را تلفیق کنید. ■

همان‌طور که مثال (ب) نشان می‌دهد، از $f_n \rightarrow f$ ت. ه.، نتیجه نمی‌شود که در اندازه $f_n \rightarrow f$ ، اما این نتیجه‌گیری روی یک فضای اندازه متناهی که در آن برخی موارد نسبتاً قویتر در دست است برقرار می‌باشد.

۲.۳۳ قضیه ایگوروف. فرض کنیم $\mu(X) < \infty$ و f_1, f_2, \dots و f توابع مختلط اندازه‌پذیری روی X باشند به طوری که $f_n \rightarrow f$ ت. ه. در این صورت به ازای هر $\varepsilon > 0$ زیرمجموعه‌ای چون $E \subset X$ وجود دارد به طوری که $\mu(E) < \varepsilon$ و $f_n \rightarrow f$ به‌طور یکنواخت بر E^c .

برهان. بدون کاستن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم که $f_n \rightarrow f$ همه‌جا بر X به ازای $k, n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم:

$$E_n(k) = \bigcup_{m=n}^{\infty} \{x : |f_m(x) - f(x)| \geq k^{-1}\}.$$

در این صورت برای هر k که ثابت فرض شود وقتی n صعود می‌کند $E_n(k)$ نزول می‌کند، و $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(k) = \emptyset$ ، لذا از $\mu(X) < \infty$ نتیجه می‌گیریم که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\mu(E_n(k)) \rightarrow 0$ و $k \in \mathbb{N}$ را مفروض گرفته و n_k را آنقدر بزرگ می‌گیریم که $\mu(E_{n_k}(k)) < \varepsilon 2^{-k}$ و قرار می‌دهیم $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(k)$. در این صورت $\mu(E) < \varepsilon$ و به ازای هر $k \geq n_k$ و $x \notin E$ داریم $|f_n(x) - f(x)| < k^{-1}$. بنابر این $f_n \rightarrow f$ به‌طور یکنواخت بر E^c . ■

گاهی اوقات همگرایی بررسی شده در حکم قضیه ایگوروف را همگرایی تقریباً یکنواخت می‌نامند. دیدن اینکه همگرایی تقریباً یکنواخت، همگرایی تقریباً همه‌جا و همگرایی در اندازه را ایجاب می‌کند مشکل نیست (تمرین ۳۹).
 (۳۲) فرض کنید $\mu(X) < \infty$. اگر f و g توابع اندازه‌پذیر مختلطی روی X باشند، تعریف کنید:

$$\rho(f, g) = \int \frac{|f - g|}{1 + |f - g|}.$$

در این صورت ρ یک متر بر فضای توابع اندازه‌پذیر است و به شرطی که هر دو تابع تقریباً همه‌جا مساوی را یکی بگیریم، همچنین نسبت به این متر $f_n \rightarrow f$ اگر و فقط اگر در اندازه $f_n \rightarrow f$.

(۳۳) اگر $f_n \geq 0$ و در اندازه $f_n \rightarrow f$ ، آنگاه $\int f \leq \liminf \int f_n$.

(۳۴) فرض کنید $f_n \rightarrow f$ و $|f_n| \leq g \in L^1$.

(الف) $\int f = \lim \int f_n$

(ب) $f_n \rightarrow f$ در L^1 .

(۳۵) $f_n \rightarrow f$ در اندازه اگر و تنها اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عضوی چون $N \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای

$$n \geq N \text{ داشته باشیم } \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < \varepsilon$$

(۳۶) اگر به ازای $n \in \mathbb{N}$ ، $\mu(E_n) < \infty$ و $\chi_{E_n} \rightarrow f$ در L^1 ، آنگاه f تقریباً همه جا با تابع مشخصه یک مجموعه

اندازه پذیر برابر است.

(۳۷) فرض کنید که f_n ها و f توابع مختلط اندازه پذیری باشند و $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

(الف) اگر ϕ پیوسته باشد و $f_n \rightarrow f$ ، آنگاه $\phi \circ f_n \rightarrow \phi \circ f$.

(ب) اگر ϕ پیوسته یکنواخت باشد و $f_n \rightarrow f$ به طور یکنواخت، تقریباً یا در اندازه، آنگاه $\phi \circ f_n \rightarrow \phi \circ f$ به ترتیب

به طور یکنواخت، تقریباً یکنواخت یا در اندازه.

(ج) وقتی فرض پیوستگی ϕ برداشته شود مثال های نقضی وجود دارند.

(۳۸) فرض کنید $f_n \rightarrow f$ در اندازه و $g_n \rightarrow g$ در اندازه.

(الف) $f_n + g_n \rightarrow f + g$ در اندازه.

(ب) اگر $\mu(X) < \infty$ ، آنگاه $f_n g_n \rightarrow fg$ در اندازه، اما اگر $\mu(X) = \infty$ حکم فوق لزوماً درست نیست.

(۳۹) اگر $f_n \rightarrow f$ به طور یکنواخت، آنگاه $f_n \rightarrow f$ در اندازه.

(۴۰) در مفروضات قضیه ایگوروف فرض « $\mu(X) < \infty$ » را می توان با فرض « به ازای همه n ها $|f_n| \leq g$ که در آن

$g \in L^1(\mu)$ » جایگزین کرد.

(۴۱) اگر μ, σ - متناهی باشد و $f_n \rightarrow f$ ، آنگاه مجموعه‌های اندازه‌پذیری چون $E_1, E_2, \dots \subset X$ وجود دارند به طوری که $\mu((\bigcup_1^\infty E_j)^c) = 0$ و $f_n \rightarrow f$ به طور یکنواخت بر هر E_j .

(۴۲) فرض کنید μ اندازه شمارشی روی \mathbb{N} باشد در این صورت $f_n \rightarrow f$ در اندازه اگر و تنها اگر $f_n \rightarrow f$ به طور یکنواخت.

(۴۳) فرض کنید که $\mu(X) < \infty$ و $f : X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ تابعی باشد به طوری که به ازای هر $(x, y), y \in [0, 1]$ اندازه‌پذیر و به ازای هر $x \in X$ پیوسته باشد.

الف) اگر $0 < \varepsilon, \delta < 1$ ، آنگاه $E_{\varepsilon, \delta} = \{x : |f(x, y) - f(x, 0)| \leq \varepsilon, \forall y < \delta\}$ اندازه‌پذیر است.
ب) به ازای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه‌ای چون $E \subset X$ وجود دارد به طوری که $\mu(E) < \varepsilon$ و وقتی $y \rightarrow 0$ ، $f(\cdot, y) \rightarrow f(\cdot, 0)$ به طور یکنواخت بر E^c .

(۴۴) قضیه لوسین) اگر $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ اندازه‌پذیر لبگ باشد و $\varepsilon > 0$ ، آنگاه مجموعه فشرده‌ای مانند $E \subset [a, b]$ وجود دارد به طوری که $\mu(E^c) < \varepsilon$ و $f|_E$ پیوسته است. (قضیه ایگوروف و قضیه ۲.۲۶ را به کار ببرید.)

۲.۵ اندازه‌های حاصلضربی

فرض کنیم (X, \mathcal{M}, μ) و (Y, \mathcal{N}, ν) دو فضای اندازه باشند. قبلاً در مورد σ -جبر حاصلضربی $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ روی $X \times Y$ بحث کردیم؛ اکنون یک اندازه روی $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ می‌سازیم. یعنی، به مفهومی روشن، حاصلضرب μ و ν را می‌سازیم. برای آغاز کار، یک مستطیل (اندازه‌پذیر) را مجموعه‌ای به شکل $A \times B$ تعریف می‌کنیم که در آن $A \in \mathcal{M}$ و $B \in \mathcal{N}$ به وضوح

$$(A \times B) \cap (E \times F) = (A \cap E) \times (B \cap F), \quad (A \times B)^c = (X \times B^c) \cup (A^c \times B).$$

از این رو، طبق گزاره ۱.۷، گردایه \mathcal{A} مرکب از اجتماع‌های متناهی از مستطیل‌ها، یک σ -جبر است، و مسلماً این σ -جبری که \mathcal{A} تولید می‌کند $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ است. فرض می‌کنیم $A \times B$ مستطیلی باشد که اجتماع (شمارش‌پذیر یا متناهی) مجزایی از مستطیل‌هایی چون $A_j \times B_j$ است. در این صورت به ازای هر $x \in X$ و $y \in Y$

$$\begin{aligned} \chi_A(x)\chi_B(y) &= \chi_{A \times B}(x, y) = \sum \chi_{A_j \times B_j}(x, y) \\ &= \sum \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(A)\chi_B(y) &= \int \chi_A(x)\chi_B(y)d\mu(x) = \sum \int \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y)d\mu(x) \\ &= \sum \mu(A_j)\chi_{B_j}(y). \end{aligned}$$

به همین روش، انتگرال گیری نسبت به y به دست می دهد:

$$\mu(A)\nu(B) = \sum \mu(A_j)\nu(B_j).$$

نتیجه می گیریم که اگر $E \in \mathcal{A}$ اجتماع مجزا از مستطیل هایی چون $A_1 \times B_1, \dots, A_n \times B_n$ باشد و قرار دهیم:

$$\pi(E) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j)\nu(B_j)$$

آنگاه (با قرار داد همیشگی $0 = \infty \cdot \infty$)، π بر \mathcal{A} خوشتعریف است (زیرا دو نمایش E به صورت اجتماع متناهی مجزایی از مستطیل ها یک تطبیق مشترک دارند) و π پیش اندازه ای روی \mathcal{A} است. بنابر این، مطابق با قضیه ۱.۱۴، π یک اندازه خارجی روی $X \times Y$ تولید می کند که تحدید آن به $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ اندازه ای است که π را توسعه می دهد. این اندازه را ضرب μ و ν نامیده و آن را با $\mu \times \nu$ نشان می دهیم. به علاوه، اگر μ و ν هر دو σ -متناهی باشند - مثلاً، $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ و $Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ که در آن $\mu(A_j) < \infty$ و $\nu(B_k) < \infty$ آنگاه $X \times Y = \bigcup_{j,k} A_j \times B_k$ و $\mu \times \nu(A_j \times B_k) < \infty$ ، لذا $\mu \times \nu$ نیز σ -متناهی است. در این حالت، بنابر قضیه ۱.۱۴، $\mu \times \nu$ یکتا اندازه ای روی $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ است که برای هر مستطیل مانند $A \times B$ $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ ، همین ساختار در مورد تعدادی متناهی از عوامل کار می کند، یعنی، فرض می کنیم به ازای $j=1, \dots, n$ ، $(X_j, \mathcal{M}_j, \mu_j)$ تعدادی فضای اندازه باشند. اگر یک مستطیل را مجموعه ای به شکل $A_1 \times \dots \times A_n$ با $A_j \in \mathcal{M}_j$ تعریف کنیم، آنگاه گردایه \mathcal{A} مرکب از اجتماع های مجزا از مستطیل ها یک σ -جبر است، و ضرب نظیر ضرب فوق اندازه ای چون $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$ روی $\mathcal{M}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_n$ است به طوری که

$$\mu_1 \times \dots \times \mu_n(A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{j=1}^n \mu_j(A_j).$$

به علاوه، اگر μ ها σ -متناهی باشند، توسعه \mathcal{A} به $\mathcal{M}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_n$ که به طور یکتا تعیین می شود، در خواص واضح شرکت پذیری

صدق می کند: برای مثال، اگر $X_1 \times X_2 \times X_3$ را با $X_1 \times X_2$ یکی بگیریم، داریم:

$$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3 = (\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \otimes \mathcal{M}_3$$

و $A_j \in \mathcal{M}_j$ و دومی با مجموعه هایی به شکل $B \times A_3$ تولید می شود که در آن $B \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ ، $A_3 \in \mathcal{M}_3$ و

$$\mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3 = (\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3$$

در کل بنا بر یکتایی برابر هستند. جزئیات برای خواننده باقی می ماند (تمرین ۴۵). تمام احکام زیر قابل تعمیم به حاصل ضرب

هایی با n عامل هستند، اما به خاطر سادگی حالت $n=2$ را در نظر خواهیم گرفت. به حالت دو فضای اندازه (X, \mathcal{M}, μ) و (Y, \mathcal{N}, ν) برمی گردیم. اگر $E \subset X \times Y$ ، به ازای $x \in X$ و $y \in Y$ ، x -بخش E_x و y -بخش E^y از E را به

صورت زیر تعریف می کنیم:

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \quad E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

همچنین، اگر f تابعی بر $X \times Y$ باشد، x -بخش f_x و y -بخش f^y از f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_x(y) = f^y(x) = f(x, y).$$

پس، برای مثال، $(X_E)^y = X_{E^y}$ و $(X_E)_x = X_{E_x}$.

۲.۳۴ گزاره.

(الف) اگر $E \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ ، آنگاه به ازای هر $x \in X$ ، $E_x \in \mathcal{N}$ و به ازای هر $y \in Y$ ، $E^y \in \mathcal{M}$.
 (ب) اگر $f: \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه به ازای هر $x \in X$ ، $f_x \in \mathcal{N}$ - اندازه‌پذیر است و به ازای $y \in Y$ ، $f^y \in \mathcal{M}$ - اندازه‌پذیر است.

برهان. فرض می‌کنیم \mathcal{R} گردایه همه زیرمجموعه‌هایی چون E از $X \times Y$ باشد به طوری که برای همه $x \in X$ ها $E_x \in \mathcal{N}$ و به ازای همه $y \in Y$ ها $E^y \in \mathcal{M}$. در این صورت به وضوح \mathcal{R} شامل همه مستطیل‌ها است (یعنی، $(A \times B)_x = B$ هرگاه $x \in A$ و $(A \times B)_x = \emptyset$ هرگاه $x \notin A$). چون $(\bigcup_1^\infty E_j)_x = \bigcup_1^\infty (E_j)_x$ و $(E^c)_x = (E_x)^c$ و مشابهی برای y -بخش‌ها برقرار است پس \mathcal{R} یک σ -جبر است. بنابر این $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \supset \mathcal{R}$ که (الف) را ثابت می‌کند. (ب) از (الف) نتیجه می‌شود زیرا

$$(f^y)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^y, \quad (f_x)^{-1}(B) = (f^{-1}(B))_x. \blacksquare$$

قبل از آنکه خیلی پیش برویم به یک لم تکنیکی نیاز داریم. یک کلاس یکنوا روی فضایی چون X را زیرمجموعه‌ای چون \mathcal{C} از $\mathcal{P}(X)$ تعریف می‌کنیم که تحت اجتماع‌های صعودی شمارش‌پذیر و اشتراک‌های نزولی شمارش‌پذیر بسته است (یعنی، اگر $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ و $E_j \in \mathcal{C}$ ، آنگاه $\bigcup E_j \in \mathcal{C}$ و $\bigcap E_j \in \mathcal{C}$). به وضوح هر σ -جبر یک کلاس یکنوا است. همچنین، اشتراک هر خانواده از کلاس‌های یکنوا یک کلاس یکنوا است، پس برای هر $E \subset \mathcal{P}(X)$ کوچکترین کلاس یکنوا یکتای شامل E موسوم به کلاس یکنوای تولید شده با E موجود است.

۲.۳۵ لم کلاس یکنوا: اگر \mathcal{A} جبری از زیر مجموعه‌های X باشد، آنگاه کلاس یکنوای \mathcal{C} که به وسیله \mathcal{A} تولید می‌شود بر σ -جبر \mathcal{M} تولید شده با \mathcal{A} منطبق است.

برهان. چون \mathcal{M} یک کلاس یکنوا است پس $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ ؛ و اگر نشان دهیم که \mathcal{C} یک σ -جبر است، خواهیم داشت $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$. بدین منظور، به ازای $E \in \mathcal{C}$ تعریف می‌کنیم:

چند یادآوری پی در پی:

• معمولاً گروه‌ها را در انتگرال‌های مکرر واقع در (۲.۲۸) حذف خواهیم کرد، لذا:

$$\int \int [f(x,y)d\mu(x)]dv(y) = \int \int f(x,y)d\mu(x)dv(y) = \int \int fd\mu dv.$$

• فرض σ -متناهی بودن لازم است؛ تمرین ۴۶ را ببینید.

• از دو جهت فرض $f \in L^+(X \times Y)$ یا $f \in L^1(\mu \times \nu)$ لازم است. نخست، ممکن است به ازای همه x ها و y ها f_x و f_y اندازه‌پذیر باشند و انتگرال‌های مکرر $\int \int fd\mu dv$ و $\int \int fd\nu d\mu$ موجود باشند حتی اگر f یک تابع $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ -اندازه‌پذیر نباشد. اما در این صورت لزومی ندارد که انتگرال‌های مکرر برابر باشند؛ تمرین ۴۷ را ببینید. دوم اینکه، اگر f نامنفی نباشد، ممکن است به ازای همه x ها و y ها f_x و f_y انتگرال‌پذیر باشند و انتگرال‌های مکرر $\int \int fd\mu dv$ و $\int \int fd\nu d\mu$ وجود داشته باشند حتی اگر $\int |f|d(\mu \times \nu) = \infty$ اما باز هم لزومی ندارد که انتگرال‌های مکرر برابر باشند؛ تمرین ۴۸ را ببینید.

• قضایای تونلی و فوبینی غالباً پشت سر هم به کار برده می‌شوند. بسیاری از اوقات مجبوریم ترتیب انتگرال‌گیری در یک انتگرال دوگانه مانند $\int \int fd\mu dv$ را عوض کنیم. برای این کار، نخست با به‌کارگیری قضیه تونلی برای برآورد انتگرال $\int |f|d(\mu \times \nu)$ بررسی می‌کنیم که $\int |f|d(\mu \times \nu) < \infty$ ؛ سپس از قضیه فوبینی برای استخراج $\int \int fd\mu dv = \int \int fd\nu d\mu$ استفاده می‌کنیم. برای مثال، تمرین‌های واقع در بند ۲۶ را ببینید.

حتی اگر μ و ν کامل باشند، $\mu \times \nu$ تقریباً هیچ‌گاه کامل نیست. در واقع، فرض می‌کنیم که مجموعه‌ای ناتهنی مانند $A \in \mathcal{M}$ وجود دارد که $\mu(A) = 0$ و $\mathcal{N} \neq \mathcal{P}(Y)$ و (این حالتی است که برای مثال، فرض کنید μ و ν اندازه‌لبگ روی \mathbb{R} است). اگر $E \in \mathcal{P}(Y) \setminus \mathcal{N}$ ، آنگاه بنابر گزاره ۲.۲۴، $A \times E \notin \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ اما $A \times E \subset A \times Y$ و $\mu \times \nu(A \times Y) = 0$.

البته اگر خواسته باشیم با اندازه‌های کامل کار کنیم می‌توانیم کامل شده $\mu \times \nu$ را در نظر بگیریم. با این قرارداد رابطه بین اندازه‌پذیری یک تابع روی $X \times Y$ و اندازه‌پذیری x -بخش‌ها و y -بخش‌های آن چندان هم ساده نیست. اما قضیه فوبینی-تونلی وقتی به طور مناسب اصلاح شود هنوز معتبر است:

۲.۳۹ قضیه فوبینی-تونلی برای اندازه‌های کامل. فرض کنیم (X, \mathcal{M}, μ) و (Y, \mathcal{N}, ν) دو فضای اندازه σ -متناهی کامل باشند و $(X \times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ کامل شده $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \nu)$ باشد. اگر f, L -اندازه‌پذیر باشد و: یا (الف) $f \geq 0$ یا (ب) $f \in L^1(\lambda)$ ، آنگاه تقریباً به ازای همه x ها $f_x \in \mathcal{N}$ -اندازه‌پذیر است و تقریباً به ازای همه y ها $f_y \in \mathcal{M}$.

اندازه پذیر است، و در حالت (ب) f_x و f^y به ازای همه x ها و y ها انتگرال پذیر نیز هستند. به علاوه، $x \mapsto \int f_x d\nu$ و $y \mapsto \int f^y d\mu$ اندازه پذیرند و در حالت (ب) نیز انتگرال پذیرند و

$$\int f d\lambda = \int \int f(x,y) d\mu(x) d\nu(y) = \int \int f(x,y) d\nu(y) d\mu(x).$$

این قضیه، نتیجه نسبتاً آسانی از قضیه ۲.۳۷ است؛ برهان آن در تمرین ۴۹ گنجانده شده است.

تمرین‌ها

(۴۵) اگر به ازای $j = 1, 2, 3$ ، (X_j, \mathcal{M}_j) یک فضای اندازه پذیر باشد، آنگاه $\otimes_1^3 \mathcal{M}_j = (\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \otimes \mathcal{M}_3$ به علاوه، اگر μ_j یک اندازه σ -متناهی روی (X_j, \mathcal{M}_j) باشد، آنگاه $(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3$.

(۴۶) فرض کنید $X = Y = [0, 1]$ ، $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ ، μ اندازه لبگ و ν اندازه شمارشی باشد. اگر قطر $X \times Y$ مجموعه $D = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ باشد، آنگاه $\int \int \chi_D d\mu d\nu$ ، $\int \int \chi_D d\nu d\mu$ و $\int \chi_D d(\mu \times \nu)$ همگی با هم مساوی هستند. (برای محاسبه $\int \chi_D d(\mu \times \nu) = \mu \times \nu(D)$ به تعریف $\mu \times \nu$ برگردید.)

(۴۷) فرض کنید $X = Y$ یک مجموعه مرتب خطی شمارش ناپذیر باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$ مجموعه $\{y \in X : y < x\}$ شمارش پذیر باشد. (مثال: مجموعه اردینال‌های شمارش پذیر.) فرض کنید $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ ، σ -جبر مجموعه‌های شمارش پذیر یا متمم شمارش پذیر باشد، $\mu = \nu$ و μ این چنین تعریف شود: $\mu(A) = 0$ هرگاه A شمارش پذیر باشد و $\mu(A) = 1$ هرگاه A متمم شمارش پذیر باشد. فرض کنید $E = \{(x, y) \in X \times X : y < x\}$ در این صورت به ازای همه x ها و همه y ها E_x و E^y اندازه پذیرند و $\int \int \chi_E d\mu d\nu$ و $\int \int \chi_E d\nu d\mu$ موجودند اما برابر نیستند. (اگر فرضیه پیوستار را بپذیریم می‌توانیم $X = [0, 1]$ را (با ترتیبی غیر متعارف) در نظر بگیریم و در نتیجه مجموعه‌ای چون $E \subset [0, 1]^2$ به دست آوریم به قسمی که به ازای همه x ها و y ها E_x شمارش پذیر و E^y متمم شمارش پذیر باشد) به ویژه برل‌ها، اما E اندازه پذیر لبگ نباشد.)

(۴۸) فرض کنید $X = Y = \mathbb{N}$ ، $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ و «اندازه شمارشی $\mu = \nu$ ». تعریف کنید:

$$f(m, n) = \begin{cases} 1 & m = n \\ -1 & m = n + 1 \\ 0 & m \neq n, n + 1 \end{cases}$$

$V_j \subset U_j$ به دست می آوریم که اضلاعشان اجتماع های متناهی از بازه ها هستند به طوری که
 $m(V_j) \geq m(U_j) - 2^{-j} \varepsilon$ اگر N به قدر کافی بزرگ باشد، آنگاه داریم:

$$m(E \setminus \bigcup_{j=1}^N V_j) \leq m(\bigcup_{j=1}^N U_j \setminus V_j) + m(\bigcup_{N+1}^{\infty} U_j) < 2\varepsilon$$

$$m(\bigcup_{j=1}^N V_j \setminus E) \leq m(\bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \setminus E) < \varepsilon$$

پس $m(E \Delta \bigcup_{j=1}^N V_j) < 3\varepsilon$ چون $\bigcup_{j=1}^N V_j$ را می توان به صورت اجتماع متناهی مجزایی از مستطیل هایی نوشت که اضلاعشان بازه ها هستند، (ج) را اثبات کرده ایم. ■

۲.۴۱ قضیه. اگر $f \in L^1(m)$ و $\varepsilon > 0$ ، تابع ساده ای مانند $\phi = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{R_j}$ که در آن هر R_j حاصلضربی از بازه ها است وجود دارد، به طوری که $\int |f - \phi| < \varepsilon$ و تابع پیوسته ای چون g وجود دارد که خارج یک مجموعه کراندار صفر است به قسمی که $\int |f - g| < \varepsilon$.

برهان. مانند برهان قضیه ۲.۲۶، f را با توابع ساده تقریب می زنیم، سپس برای تقریب زدن (تابع) اخیر با توابع ϕ به شکل مطلوب، از قسمت آخر قضیه ۲.۴۰ استفاده می کنیم. بالاخره با به کارگیری تعمیمی بدیهی از استدلال واقع در برهان قضیه ۲.۲۶، چنین ϕ هایی را با توابع پیوسته تقریب می زنیم. ■

۲.۴۲ قضیه. اندازه لیگ تحت انتقال پایا است. به طور دقیق تر، به ازای $\tau_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، $a \in \mathbb{R}^n$ صورت $\tau_a(x) = x + a$ تعریف می کنیم.

(الف) اگر $E \in \mathcal{L}^n$ ، آنگاه $\tau_a(E) \in \mathcal{L}^n$ و $m(\tau_a(E)) = m(E)$

(ب) اگر $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ اندازه پذیر لیگ باشد، آنگاه $f \circ \tau_a$ نیز چنین است. به علاوه، اگر $f \geq 0$ یا $f \in L^1(m)$ ،

$$\int (f \circ \tau_a) dm = \int f dm$$

برهان. چون τ_a و وارونش، یعنی τ_{-a} پیوسته اند، رده مجموعه های برل را حفظ می کنند. اگر E یک مستطیل باشد، فرمول $m(\tau_a(E)) = m(E)$ به آسانی از حکم (۱- بعدی) (قضیه ۱.۲۱) حاصل می شود و در نتیجه برای مجموعه های برل ذکر شده حاصل می شود زیرا m با اثرش روی مستطیل ها مشخص می شود (یکتایی در قضیه ۱.۱۴). به ویژه، گردایی مجموعه های برل E به طوری که $m(E) = 0$ تحت τ_a پایا است. اکنون بلافاصله حکم (الف) حاصل می شود.

چنانچه f اندازه پذیر لبگ و B یک مجموعه برل در \mathbb{C} باشد، داریم $f^{-1}(B) = E \cup N$ که در آن E یک مجموعه برل است و $m(N) = 0$ اما $m(\tau_a^{-1}(E))$ برل است و $m(\tau_a^{-1}(N)) = 0$ ، لذا $(f \circ \tau_a)^{-1}(B) \in \mathcal{L}^n$ و $f \circ \tau_a$ اندازه پذیر لبگ است. وقتی $f = \chi_B$ ، تساوی $\int (f \circ \tau_a) d\mu = \int f d\mu$ به $m(\tau_{-a}(E)) = m(E)$ تبدیل می شود. در نتیجه بنا بر خطی بودن مطلب فوق در مورد توابع ساده درست است و از این رو بنا بر تعریف انتگرال برای توابع اندازه پذیر تامنی درست می باشد. در نتیجه در نظر گرفتن قسمت های مثبت و منفی بخش های حقیقی و موهومی حکم را برای $f \in \mathcal{L}^1(m)$ به دست می دهد. ■

اکنون اندازه لبگ روی \mathbb{R}^n را با نظریه بسیار ساده اندازه n - بعدی مقایسه می کنیم که معمولاً در کتاب های پیشرفته حسابان یافت می شود. در این بحث، هر مکعب در \mathbb{R}^n یک حاصلضرب دکارتی از n بازه بسته ای است که طول های آنها همگی برابرند.

برای $k \in \mathbb{Z}$ ، فرض می کنیم Q_k گردایه مکعب هایی باشد که طول ضلعشان 2^{-k} است و رأس هایشان در شبکه $(2^{-k}\mathbb{Z})^n$ قرار دارند. یعنی، $\prod_{j=1}^n [a_j, b_j] \in Q_k$ اگر و تنها اگر a_j, b_j و $2^k a_j$ اعداد صحیح باشند و $b_j - a_j = 2^{-k}$ ($1 \leq j \leq n$). توجه کنید که هر دو مکعب در Q_k درون های مجزا دارند و مکعب های واقع در Q_{k+1} از روی مکعب های Q_k با دو نیم کردن اضلاع به دست می آیند.

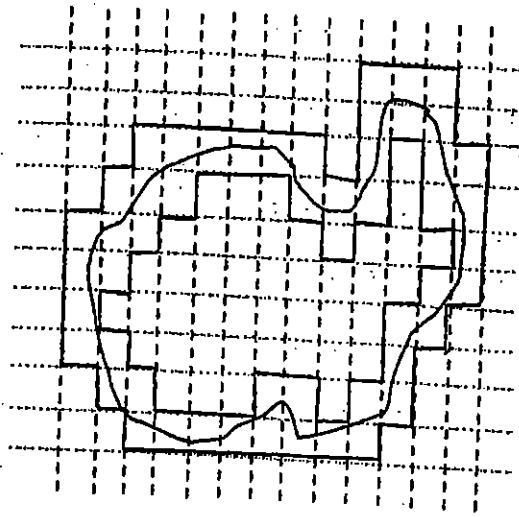
اگر $E \subset \mathbb{R}^n$ ، آنگاه تقریب های داخلی و خارجی برای E توسط شبکه مکعب های واقع در Q_k را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\underline{A}(E, k) = \bigcup \{Q \in Q_k : Q \subset E\}, \quad \bar{A}(E, k) = \bigcup \{Q \in Q_k : Q \cap E \neq \emptyset\}.$$

(شکل ۲.۲ را ببینید). اندازه $\underline{A}(E, k)$ (به معنای ساده هندسی یا به معنی لبگ) درست 2^{-nk} برابر تعداد مکعب های واقع در Q_k است که در $\underline{A}(E, k)$ قرار دارند و آن را با $m(\underline{A}(E, k))$ نشان می دهیم؛ به طور مشابه برای $m(\bar{A}(E, k))$ عمل می کنیم. همچنین، مجموعه های $\underline{A}(E, k)$ با k صعود می کنند درحالی که مجموعه های $\bar{A}(E, k)$ نزول می کنند، زیرا هر مکعب واقع در Q_k اجتماعی از مکعب های واقع در Q_{k+1} است. بنا بر این حدود

$$\underline{\kappa}(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(\underline{A}(E, k)), \quad \bar{\kappa}(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(\bar{A}(E, k))$$

وجود دارند. این حد ها گنجایش داخلی و خارجی E نامیده می شوند، و اگر مساوی باشند مقدار مشترک آنها $\kappa(E)$ گنجایش جردن E است.



شکل ۲.۲

دو تفسیر: نخست اینکه، گنجایش جردن معمولاً با استفاده از مستطیل‌های کلی تعریف می‌شود که اضلاعشان بازه‌هایی غیر از مکعب‌های دو دویی ما هستند، اما نتیجه یکسان است. دوم اینکه، هر چند که همه تعاریف فوق برای مجموعه دلخواهی چون $E \subset \mathbb{R}^n$ بنا نهاده شد، نظریه گنجایش جردن فقط وقتی با معنی است که E کراندار باشد، زیرا در غیر این صورت $\bar{\kappa}(E)$ همواره مساوی ∞ است.

فرض کنیم

$$\underline{A}(E) = \bigcup_k \underline{A}(E, k), \quad \bar{A}(E) = \bigcap_k \bar{A}(E, k).$$

در این صورت $\underline{A}(E) \subset E \subset \bar{A}(E)$ ، $\underline{A}(E)$ و $\bar{A}(E)$ مجموعه‌های برل هستند و $\kappa(E) = m(\underline{A}(E))$ و $\bar{\kappa}(E) = m(\bar{A}(E))$. بنا بر این گنجایش جردن E وجود دارد اگر و فقط اگر $m(\bar{A}(E) \setminus \underline{A}(E)) = 0$ و این هم ایجاب می‌کند که E اندازه‌پذیر لیگ باشد و $m(E) = \kappa(E)$. برای بیشتر روشن شدن رابطه بین اندازه لیگ و فرآیند تقریب زدنی که منجر به گنجایش جردن شد، لم زیر را اثبات می‌کنیم. (قسمت دوم لم بعداً مورد استفاده قرار خواهد گرفت).

۲.۴۳ لم. اگر $U \subset \mathbb{R}^n$ باز باشد، آنگاه $U = \underline{A}(U)$. به علاوه، U اجتماع شمارش‌پذیری از مکعب‌هایی است که درون‌های آنها مجزا هستند.

برهان. اگر $x \in U$ قرار می‌دهیم $\delta = \inf\{y - x : y \notin U\}$. چون U باز است δ مثبت است. اگر Q مکعبی در Q_δ باشد که شامل x است، آنگاه هر $y \in Q$ در فاصله‌ای حداکثر $\sqrt{n} \cdot \delta$ از x است (بدترین حالت این است که به ازای

همه z ها، $|z_j - z_k| = 2^{-k}$ پس خواهیم داشت $Q \subset U$ مشروط بر اینکه k به اندازه کافی بزرگ بوده و در نتیجه $\delta < 2^{-k} \sqrt{n}$. اما در این صورت $x \in \underline{A}(U, k) \subset \underline{A}(U)$. این نشان می‌دهد که $\underline{A}(U) = U$ و حکم دوم با نوشتن

$$\underline{A}(U) = \underline{A}(U, 0) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} [\underline{A}(U, k) \setminus \underline{A}(U, k-1)]$$

به دست می‌آید. $\underline{A}(U, 0)$ اجتماعی (شمارش پذیر) از مکعب‌های واقع در Q_0 است، و به ازای $k, \geq 1$ ، بستار $\underline{A}(U, k) \setminus \underline{A}(U, k-1)$ اجتماعی (شمارش پذیر) از مکعب‌های واقع در Q_k است. این مکعب‌ها همگی درون‌های مجزایی دارند و حکم حاصل می‌شود. ■

بلافاصله لم ۲.۴۳ ایجاب می‌کند که اندازه لبگ هر مجموعه باز با گنجایش داخلی آن برابر است. از سوی دیگر، فرض می‌کنیم $F \subset \mathbb{R}^n$ فشرده است. مکعب بزرگی مثل $Q_0 = \{x : \max |x_j| \leq 2^M\}$ می‌توان یافت که درونش یعنی $\text{int}(Q_0)$ شامل F باشد. اگر $Q \in Q_k$ و $Q \subset Q_0$ ، آنگاه $Q \cap F \neq \emptyset$ یا $Q \subset (Q_0 \setminus F)$ ، لذا

$$m(\overline{A}(F, k)) + m(\underline{A}(Q_0 \setminus F, k)) = m(Q_0).$$

با فرض $k \rightarrow \infty$ می‌بینیم که $\overline{\kappa}(F) + \underline{\kappa}(Q_0 \setminus F) = m(Q_0)$ اما $Q_0 \setminus F$ اجتماع مجموعه‌های باز $\text{int}(Q_0) \setminus F$ و مرز Q_0 است که دارای گنجایش صفر است، پس

$$\underline{\kappa}(Q_0 \setminus F) = \underline{\kappa}(\text{int}(Q_0) \setminus F) = m(Q_0 \setminus F).$$

نتیجه می‌گیریم که اندازه لبگ هر مجموعه فشرده با گنجایش خارجی آن برابر است.

با تلفیق این نتایج و قسمت (الف) از قضیه ۲.۴ چگونگی مقایسه اندازه لبگ با گنجایش جردن را می‌توان به دقت دید. گنجایش جردن E با تقریب زدن E از داخل و بیرون به وسیله اجتماع‌های متناهی از مکعب‌ها تعریف می‌شود. از طرف دیگر، اندازه لبگ E با یک فرآیند تقریب زدن دو مرحله‌ای داده می‌شود: نخست E را از بیرون به وسیله مجموعه‌های باز و از داخل با مجموعه‌های فشرده تقریب می‌زنیم و سپس مجموعه‌های باز را از داخل و مجموعه‌های فشرده را از خارج به وسیله اجتماع‌های متناهی از مکعب‌ها تقریب می‌زنیم. مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ، درست آنهایی هستند که برایشان این تقریبات داخلی - خارجی و خارجی - داخلی در حد جواب یکسان داشته باشند. (به تمرین ۱۹ از بند ۱.۴ مراجعه کنید).

اکنون رفتار انتگرال لبگ تحت تبدیلات خطی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. یک نگاشت خطی مانند $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را با ماتریس $(T_{ij}) = (e_i \cdot T e_j)$ یکی می‌گیریم که در آن $\{e_j\}$ پایه استاندارد \mathbb{R}^n است. دترمینان این ماتریس را با $\det T$ نشان می‌دهیم و یادآوری می‌کنیم که $\det(T \circ S) = (\det T)(\det S)$. به علاوه، نماد استاندارد $GL(n, \mathbb{R})$ (گروه «خطی عام») را برای تبدیلات خطی وارون پذیر \mathbb{R}^n به کار می‌بریم. این حقیقت از جبر خطی مقدماتی را لازم داریم که هر $T \in GL(n, \mathbb{R})$ را می‌توان به صورت حاصلضربی از تعدادی متناهی تبدیل خطی از سه نوع «مقدماتی» نوشت. نوع اول یکی از مؤلفه‌ها را در ثابت ناصفری چون c ضرب کرده و بقیه را ثابت نگه می‌دارد؛ نوع دوم، مضربی از یک مؤلفه را به یک

مؤلفه را به یک مؤلفه دیگر می‌افزاید و همه مؤلفه‌ها به جز مؤلفه مذکور را ثابت نگه می‌دارد؛ نوع سوم، دو مؤلفه را جابه‌جا می‌کند و بقیه را ثابت نگه می‌دارد. به طور نمادی:

$$T_1(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = (x_1, \dots, cx_j, \dots, x_n) \quad (c \neq 0),$$

$$T_2(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_j + cx_k, \dots, x_n), \quad (k \neq j),$$

$$T_3(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_j, \dots, x_n).$$

اینکه هر تبدیل وارون‌پذیر حاصلضربی از این سه نوع تبدیل است به آسانی از این حقیقت به دست می‌آید که هر ماتریس غیر منفرد را می‌توان با عملیات سطری به ماتریس همانی تبدیل کرد.

۲.۴۴ قضیه. فرض کنیم $T \in GL(n, \mathbb{R})$

(الف) اگر f یک تابع اندازه‌پذیر لبگ روی \mathbb{R}^n باشد، $f \circ T$ نیز چنین است. اگر $f \geq 0$ یا $f \in L^1(m)$ ، آنگاه

$$\int f(x) dx = |\det T| \int f \circ T(x) dx. \quad (2.45)$$

(ب) اگر $E \in \mathcal{L}^n$ ، آنگاه $T(E) \in \mathcal{L}^n$ و $m(T(E)) = |\det T| m(E)$

برهان. نخست فرض می‌کنیم f اندازه‌پذیر برل است و در نتیجه $f \circ T$ اندازه‌پذیر برل است زیرا T پیوسته است.

چنانچه ۲.۴۵ برای تبدیل‌های T و S درست باشد برای $T \circ S$ نیز درست است، زیرا

$$\int f(x) dx = |\det T| \int f \circ T(x) dx = |\det T| |\det S| \int (f \circ T) \circ S(x) dx$$

$$= |\det(T \circ S)| \int f \circ (T \circ S)(x) dx$$

بنابر این کافی است ۲.۴۵ را برای T ‌های از نوع T_1 ، T_2 ، T_3 ثابت کنیم که در فوق توصیف شدند. اما این هم پی‌آمد

ساده‌ای از قضیه تونلی - فوبینی است. برای T_3 ترتیب انتگرال‌گیری نسبت به x_j و x_k را عوض می‌کنیم، و در مورد T_1 و

G نخست نسبت به x_j انتگرال می‌گیریم و فرمول n -بعدی زیر را به کار می‌بریم که از قضیه ۱.۲۱ نتیجه می‌شود:

$$\int f(t) dt = |c| \int f(ct), \quad \int f(t+a) dt = \int f(t) dt.$$

از آنجا که $\det T_1 = c$ و $\det T_2 = 1$ و $\det T_3 = -1$ به آسانی بررسی می‌شوند، (۲.۴۵) اثبات می‌شود. به علاوه، اگر

E یک مجموعه برل باشد، $T(E)$ نیز برل است (زیرا T^{-1} پیوسته است) و با گرفتن $f = \chi_{T(E)}$ به دست می‌آوریم

$$m(T(E)) = |\det T| m(E).$$

به ویژه، رده مجموعه‌های بوج برل تحت T و T^{-1} پایا است و از این رو \mathcal{L}^n نیز چنین است. اکنون مانند برهان قضیه ۲.۴۲، حکم

برای مجموعه‌ها و توابع اندازه‌پذیر لبگ حاصل می‌شود. ■

۲.۴۶ نتیجه، اندازه لبگ تحت دوران‌ها پایا است.

برهان. دوران‌ها نگاشت‌هایی خطی هستند که در $TT^* = 1$ صدق می‌کنند که در آن T^* ترانزپوزیته T است. چون $\det T = \det T^*$ ، این ایجاب می‌کند که $|\det(T)| = 1$.

بعداً قضیه ۲.۴۴ را به نگاشت‌های مشتق‌پذیر تعمیم خواهیم داد. این نتیجه در هیچ جای دیگر این کتاب مورد استفاده قرار نخواهد گرفت و می‌توان آن را پس از یکبار خواندن کنار گذاشت. تعمیم آن به روش‌های قدری متفاوت را در بند ۱۱.۲ ثابت خواهیم کرد.

فرض کنیم $G = (g_1, \dots, g_n)$ نگاشتی از مجموعه بازی چون $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ بتوی \mathbb{R}^n باشد که مولفه‌های g_j در آن از کلاس C^1 هستند، یعنی، مشتقات جزئی مرتبه اول آنها پیوسته‌اند. آن نگاشت خطی که با ماتریس $(\frac{\partial g_i}{\partial x_j})(x)$ از مشتقات جزئی در x تعریف می‌شود را با $D_x G$ نشان می‌دهیم. (ملاحظه می‌شود که اگر G خطی باشد، آنگاه به ازای همه x ها $D_x(G) = G$). G یک C^1 -دیفومورفیسم نامیده می‌شود هرگاه G یک به یک باشد و به ازای هر $x \in \Omega$ وارون‌پذیر باشد. در این حالت، قضیه تابع معکوس حکم می‌کند که $G^{-1} : G(\Omega) \rightarrow \Omega$ نیز یک C^1 -دیفومورفیسم باشد و به ازای هر $x \in G(\Omega)$

$$D_x(G^{-1}) = [D_{G^{-1}(x)}G]^{-1}.$$

۲.۴۷ قضیه، فرض کنیم Ω یک مجموعه باز در \mathbb{R}^n و $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک C^1 -دیفومورفیسم باشد.

الف) اگر f یک تابع اندازه‌پذیر لبگ روی $G(\Omega)$ باشد، آنگاه $f \circ G$ روی Ω اندازه‌پذیر لبگ است. اگر $f \geq 0$ یا $f \in L^1(G(\Omega), m)$ ، آنگاه

$$\int_{G(\Omega)} f(x) dx = \int_{\Omega} f \circ G(x) |\det D_x G| dx.$$

ب) اگر $E \subset \Omega$ و $E \in \mathcal{L}^n$ ، آنگاه $G(E) \in \mathcal{L}^n$ و

$$m(G(E)) = \int_E |\det D_x G| dx.$$

برهان. کافی است مجموعه‌ها و توابع اندازه‌پذیر برل را در نظر بگیریم. چون G و G^{-1} هر دو پیوسته‌اند، در این حالت مشکلات اندازه‌پذیری وجود ندارد و همانند برهان قضیه ۲.۴۲ حالت کلی حاصل می‌شود.

یک نماد گذاری کوتاه: برای $x \in \mathbb{R}^n$ و $T = (T_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$ ، قرار می‌دهیم:

$$\|x\| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|, \quad \|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |T_{ij}|.$$

در این صورت داریم $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$ و $\{x : \|x - a\| \leq h\}$ مکعبی است که طول ضلعش $2h$ است و مرکزش در a قرار دارد.

فرض می‌کنیم Q مکعبی در Ω باشد، مثلاً $Q = \{x : \|x - a\| \leq h\}$. بنابراین قضیه مقدار میانی برای γ ای روی خط واصل x و a داریم:

$$g_j(x) - g_j(a) = \sum_k (x_k - a_k) \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_k} \right)(y),$$

لذا به ازای $x \in Q$ ، $\|G(x) - G(a)\| \leq h (\sup_{y \in Q} \|D_y(G)\|)$ ، به عبارت دیگر $G(Q)$ در مکعبی با طول ضلعی معادل با $\|D_y(G)\|$ $\sup_{y \in Q}$ برابر طول ضلع Q مشمول است، پس بنا بر قضیه ۲.۴۴ خواهیم داشت:

$$m(G(Q)) \leq (\sup_{y \in Q} \|D_y(G)\|)^n m(Q).$$

اگر $T \in Gl(n, \mathbb{R})$ ، این فرمول با جایگزینی $T^{-1} \circ G$ به جای G و با به کارگیری قضیه ۲.۴۴ به دست می‌آوریم:

$$m(G(Q)) = |\det T| m(T^{-1}(G(Q)))$$

$$|\det T| (\sup_{y \in Q} \|T^{-1} D_y(G)\|)^n m(Q) \quad (2.48)$$

چون $D_y G$ در y پیوسته است، به ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توانیم $\delta > 0$ ای انتخاب کنیم به طوری که اگر $y, z \in Q$ و $\|y - z\| \leq \delta$ ، آنگاه

$$\|D_z(G)^{-1} D_y G\| \leq 1 + \varepsilon.$$

حال می‌ایم Q را به زیرمکعب‌هایی چون Q_1, \dots, Q_N افزایش می‌کنیم که درون‌هایشان مجزا هستند، طول اضلاعشان حداکثر δ است و مراکزشان x_1, \dots, x_N می‌باشند. با استفاده از (۲.۴۸) و با جایگزینی Q_j به جای Q و $T = D_{x_j} G$ به دست

می‌آوریم:

$$m(G(Q)) \leq \sum_1^n m(G(Q_j))$$

$$\leq \sum_1^n |\det D_{x_j} G| (\sup_{y \in Q_j} \|(D_{x_j} G)^{-1} D_y G\|)^n m(Q_j)$$

$$\leq (1 + \varepsilon) \sum_1^n |\det D_{x_j} G| m(Q_j).$$

همین آخرین مجموع، انتگرال $\sum_1^n |\det D_{x_j} G| \chi_{Q_j}(x)$ است که وقتی $\delta \rightarrow 0$ روی Q به طور یکنواخت به

$|\det D_x G|$ میل می‌کند زیرا $D_x G$ پیوسته است. بنا بر این، با فرض $\varepsilon \rightarrow 0$ و $\delta \rightarrow 0$ معلوم می‌شود که

$$m(G(Q)) \leq \int_Q |\det D_x G| dx.$$

ادعا می‌کنیم که این برآورد با جایگزین کردن هر مجموعهٔ برل در Ω به جای Q برقرار است. مسلماً، اگر $U \subset \Omega$ باز باشد، بنا بر لم ۲.۴۳ می‌توانیم بنویسیم $U = \bigcup_1^\infty Q_j$ که در آن Q_j ها مکعب‌هایی با درون‌های مجزا هستند. چون مرزهای مکعب

$$m(G(U)) \leq \sum_1^{\infty} m(G(Q_j)) \leq \sum_1^{\infty} \int_{Q_j} |\det D_x G| dx = \int_U |\det D_x G| dx.$$

حال، قرار می‌دهیم $W_K = \Omega \cap \{x : |x| < K, |\det D_x G| < K\}$. اگر E زیرمجموعه برلی از W_K باشد، آنگاه بنابر قضیه ۲.۴۰ دنباله‌ای نزولی از مجموعه‌های باز $U_j \subset W_{K+1}$ وجود دارد به طوری که $E \subset \bigcap_1^{\infty} U_j$ و $m(\bigcap_1^{\infty} U_j \setminus E) = 0$ و این رو بنابر برآورد قبل و قضیه همگرایی مغلوب،

$$\begin{aligned} m(G(E)) &\leq m(G(\bigcap_1^{\infty} U_j)) = \lim m(G(U_j)) \\ &\leq \lim \int_{U_j} |\det D_x G| dx = \int_E |\det D_x G| dx. \end{aligned}$$

بالاخره، چون m, σ -متناهی است، از این مطلب نتیجه می‌گیریم که $m(G(E)) \leq \int_E |\det D_x G| dx$ به ازای هر مجموعه برل مانند $E \subset \Omega$ برقرار است؛ چنانچه $f = \sum a_j \chi_{A_j}$ یک تابع ساده نامنفی روی $G(\Omega)$ باشد، داریم:

$$\int_{G(\Omega)} f(x) dx = \sum a_j m(A_j) \leq \sum a_j \int_{G^{-1}(A_j)} |\det D_x G| dx = \int_{\Omega} f \circ G(x) |\det D_x G| dx.$$

در نتیجه قضایای ۲.۱۰ و همگرایی یکتوا ایجاب می‌کنند که

$$\int_{G(\Omega)} f(x) dx \leq \int_{\Omega} f \circ G(x) |\det D_x G| dx$$

به ازای هر تابع اندازه پذیر نامنفی مانند f برقرار باشد اما همین استدلال را با جایگزینی G^{-1} به جای G و $f \circ G$ به جای f به کار برده و به دست می‌آوریم:

$$\int_{\Omega} f \circ G(x) |\det D_x G| dx \leq \int_{G(\Omega)} f \circ G \circ G^{-1}(x) |\det D_{G^{-1}(x)} G| |\det D_x G^{-1}| dx = \int_{G(\Omega)} f(x) dx.$$

این مطلب، (الف) را برای $f \geq 0$ به اثبات می‌رساند و حالت $f \in L^1$ مستقیماً نتیجه می‌شود. چون (ب) حالت خاصی از (الف) است که در آن $f = \chi_{G(E)}$ ، برهان کامل شده است. ■

تمرین‌ها

(۵) خلأهای موجود در برهان قضیه ۲.۴۱ را پر کنید.

(۵) چنانچه T وارون پذیر نباشد چقدر از قضیه ۲.۴۴ معتبر باقی می‌ماند؟

(۵) فرض کنید $E = [0, 1] \times [0, 1]$ ، وجود و برابری انتگرال‌های $\int_E f dm^2$ و $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$

را برای f های زیر بررسی کنید:

(الف) $f(x, y) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-2}$

(ب) $f(x, y) = (1 - xy)^{-a}$ ($a > 0$)

(ج) $f(x, y) = \begin{cases} (x - \frac{1}{y})^{-2} & 0 < y < |x - \frac{1}{y}| \\ \text{در غیر این صورت} & \end{cases}$

۵۶) اگر f روی $(0, a)$ انتگرال پذیر لبگ باشد و $g(x) = \int_x^a t^{-1} f(t) dt$ ، آنگاه $\int_0^a g(x) dx = \int_0^a f(x) dx$

۵۷) با انتگرال گیری از $e^{-sx} \sin x$ نسبت به x و y نشان دهید که برای $s > 0$

$$\int_0^\infty e^{-sx} x^{-1} \sin x dx = \arctan(s^{-1})$$

(یادآوری می کنیم که $\tan(\frac{\pi}{4} - \theta) = (\tan \theta)^{-1}$ به قسمت (د) از تمرین ۳۱ مراجعه کنید).

۵۸) با انتگرال گیری از $e^{-sx} \sin^2 xy$ نسبت به x و y نشان دهید که برای $s > 0$

$$\int e^{-sx} x^{-1} \sin^2 x dx = \frac{1}{4} \log(1 + 4s^{-2})$$

۵۹) فرض کنید $f(x) = x^{-1} \sin x$

(الف) نشان دهید که $\int_0^\infty |f(x)| dx = \infty$

(ب) با انتگرال گیری از $e^{-sx} \sin x$ نسبت به x و y نشان دهید که $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx = \frac{\pi}{4}$. (با توجه به

قسمت (الف)، برای گذراندن حد از انتگرال، دقت لازم دارد).

۶۰) نشان دهید که برای هر $x, y > 0$ ، $\Gamma(x)\Gamma(y) / \Gamma(x+y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$. (به یاد داشته باشید که

Γ در بند ۲.۳ تعریف شده است. $\Gamma(x)\Gamma(y)$ را به صورت یک انتگرال دوگانه نوشته و آرگمان نما را به عنوان متغیر جدید

انتگرال گیری به کار برید.)

۶۱) اگر f روی $[0, \infty)$ پیوسته باشد، برای $\alpha > 0$ و $x \geq 0$ فرض کنید

$$I_\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt.$$

$I_\alpha f$ انتگرال کسری f نامیده می شود.

(الف) برای $\alpha, \beta > 0$ ، $I_{\alpha+\beta} f = I_\alpha (I_\beta f)$. (از تمرین ۶۰ استفاده کنید.)

(ب) اگر $I_n f$ یک مشتق n ام f است،

مهمترین دستگاه‌های مختصات غیر خطی در \mathbb{R}^1 و \mathbb{R}^2 مختصات قطبی ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$) و مختصات کروی

$$(x = r \sin \phi \cos \theta, y = r \sin \phi \sin \theta, z = r \cos \phi)$$

هستند. در صورت به کار بردن قضیه ۲.۴۷ در مورد این مختصات فرمول‌های آشنای (با تسامح نوشته شده) وجود دارند، اما وقتی بعد افزایش می‌یابد این دستگاه‌ها به طور سرسام‌آوری پیچیده می‌شوند. (تمرین ۶۵ را ببینید).

اما به دلایل متعددی کافی است بدانیم اندازه لبگ عملاً حاصلضرب اندازه $r^{n-1} dr$ روی $(0, \infty)$ و «اندازه مسطح» معین روی کره واحد است ($d\theta$ برای $n=2$ و $\sin \phi d\theta d\phi$ برای $n=3$).

ساختن این اندازه مسطح به کمک حکم آشنایی از هندسه مسطح صورت می‌گیرد. یعنی، اگر S_θ قطاعی از یک قرص با شعاع r با زاویه مرکزی θ باشد (یعنی، ناحیه‌ای در قرص که بین دو ضلع زاویه واقع است)، مساحت $m(S_\theta)$ با θ متناسب است؛ در واقع $m(S_\theta) = \frac{1}{2} r^2 \theta$. این معادله را می‌توان بر حسب θ حل کرده و در نتیجه برای تعریف اندازه زاویه θ بر حسب $m(S_\theta)$ به کار برد. همین ایده در ابعاد بالاتر نیز کارساز است: اندازه مسطح یک زیرمجموعه از کره واحد را بر حسب اندازه لبگ قطاع متناظر گوی واحد تعریف خواهیم کرد. کره واحد $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ را با S^{n-1} نشان خواهیم داد. اگر $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ، مختصات قطبی x عبارتند از:

$$r = |x| \in (0, \infty), \quad x' = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}.$$

نگاشت $\Phi(x) = (r, x')$ دوسویی بیوسته‌ای از $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ به $(0, \infty) \times S^{n-1}$ است که وارون (بیوسته) آن $\Phi^{-1}(r, x') = rx'$ می‌باشد. اندازه برلی را که توسط Φ از اندازه لبگ روی \mathbb{R}^n به $(0, \infty) \times S^{n-1}$ القاء می‌شود با m_* نشان داده می‌شود، یعنی

$$m_*(E) = m(\Phi^{-1}(E)).$$

به علاوه، اندازه $\rho_n = \rho$ را روی $(0, \infty)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho(E) = \int_E r^{n-1} dr.$$

۲.۴۹ قضیه. اندازه برلی یکتایی چون $\sigma = \sigma_{n-1}$ روی S^{n-1} وجود دارد به طوری که $m_* = \rho \times \sigma$. اگر f روی \mathbb{R}^n اندازه پذیر برلی باشد و $f \geq 0$ یا $f \in L^1(m)$ ، آنگاه

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(rx') r^{n-1} d\sigma(x') dr. \quad (2.50)$$

برهان. وقتی f تابع مشخص یک مجموعه باشد، معادله (۲.۵۰) صرفاً یک بازگویی معادله $m_* = \rho \times \sigma$ است، و به دلیل تقریب زدن‌ها و خطی بودن متداول، این معادله برای همه f ‌ها حاصل می‌شود. بنابر این، تنها ساختن σ لازم است. اگر E یک مجموعه برل در S^{n-1} باشد، به ازای $a > 0$ قرار دهید:

$$E_a = \Phi^{-1}((0, a] \times E) = \{rx' : 0 < r \leq a, x' \in E\}.$$

چنانچه (۲.۵۰) برای $f = \chi_{E_a}$ برقرار باشد باید داشته باشیم:

$$m(E_a) = \int_0^a \int_E r^{n-1} d\sigma(x') dr = \sigma(E) \int_0^a r^{n-1} dr = \frac{\sigma(E)}{n}$$

بنابر این تعریف می‌کنیم $\sigma(E) = n \cdot m(E_a)$. چون $E \mapsto E_a$ مجموعه‌های برل را به مجموعه‌های برل می‌برد و اجتماع‌ها، اشتراک‌ها و متمم‌ها را تبدیل می‌کند، واضح است که σ یک اندازه برل روی S^{n-1} است. همچنین چون E_a تصویر E تحت نگاشت $x \mapsto ax$ می‌باشد، از قضیه ۲.۴۴ نتیجه می‌گیریم که $m(E_a) = a^n m(E)$ ، و لذا اگر $0 < a < b$ خواهیم داشت:

$$m_*((a, b] \times E) = m(E_b \setminus E_a) = \frac{b^n - a^n}{n} \sigma(E) = \sigma(E) \int_a^b r^{n-1} dr = \rho \times \sigma((a, b] \times E).$$

$E \in \mathcal{B}_{S^{n-1}}$ را ثابت گرفته و فرض کنید \mathcal{A}_E گردایه اجتماع‌های مجزای متناهی از مجموعه‌های به شکل $(a, b] \times E$ باشد. بنابر گزاره ۱.۷، \mathcal{A}_E یک جبر روی $(0, \infty) \times E$ است که σ - جبر $\mathcal{M}_E = \{A \times E : A \in \mathcal{B}_{(0, \infty)}\}$ را تولید می‌کند. با توجه به محاسبات قبل داریم $m_* = \rho \times \sigma$ بر \mathcal{A}_E و از این رو، طبق حکم یکتایی در قضیه ۱.۱۴، $m_* = \rho \times \sigma$ بر \mathcal{M}_E . اما $\mathcal{M}_E = \{A \times E : A \in \mathcal{B}_{(0, \infty)}\}$ درست مجموعه مستطیل‌های برل واقع در $S^{n-1} \times (0, \infty)$ است، لذا به‌کارگیری مجدد قضیه یکتایی نشان می‌دهد که روی همه مجموعه‌های برل $m_* = \rho \times \sigma$.

البته، با در نظر گرفتن کامل شده اندازه σ ، (۲.۵۰) را می‌توان به توابع اندازه پذیر لبگ تعمیم داد. جزئیات به خواننده واگذار می‌شوند.

۲.۵۱ نتیجه. اگر f تابع اندازه‌پذیری بر \mathbb{R}^n و نا منفی یا انتگرال‌پذیر باشد به قسمی که به ازای تابعی چون g بر $(0, \infty)$ داشته باشیم $f(x) = g(x)$ ، آنگاه

$$\int f(x) dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty g(r) r^{n-1} dr.$$

۲.۵۲ نتیجه. فرض کنید c و C نشان‌دهنده دو ثابت مثبت باشند و $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < c\}$. فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر روی \mathbb{R}^n باشد.

الف) اگر به ازای $n < a$ ، $|f(x)| \leq C|x|^{-a}$ بر B ، آنگاه $f \in L^1(B)$. اما اگر $|f(x)| \geq C|x|^{-n}$ بر B ،

ب) اگر به ازای $n > a$ ، $|f(x)| \leq C|x|^{-a}$ بر B^c ، آنگاه $f \in L^1(B^c)$ ، اما اگر $|f(x)| \geq C|x|^{-n}$ بر B^c ، آنگاه $f \notin L^1(B^c)$.

برهان. نتیجه ۲.۵۱ را در مورد $\chi_B|x|^{-a}$ و $\chi_{B^c}|x|^{-a}$ به کار برید. ■

مختصراً $\sigma(S^{n-1})$ را محاسبه خواهیم کرد. البته، می دانیم که $\sigma(S^1) = 2\pi$ ؛ این درست تعریف 2π به عنوان نسبت محیط دایره به شعاع آن است.

با مجهز شدن به این حقیقت، می توانیم یکی از انتگرال های بسیار مهم را محاسبه کنیم.

۲.۵۳ گزاره. اگر $a > 0$ ، آنگاه

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-a|x|^2) dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}}$$

برهان. انتگرال سمت چپ را با I_n نشان می دهیم. برای $n = 2$ از نتیجه ۲.۵۱ معلوم می شود که

$$I_2 = 2\pi \int_0^\infty r e^{-ar^2} dr = -\left(\frac{\pi}{a}\right) e^{-ar^2} \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{a}$$

چون $\exp(-a|x|^2) = \prod_{j=1}^n \exp(-ax_j^2)$ ، قضیه تونلی ایجاب می کند که $I_n = (I_1)^n$. به ویژه $I_1 = (I_1)^{\frac{1}{2}}$ ، لذا $I_n = (I_1)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}}$

به محض اینکه این حکم را دانستیم، شگرد به کار رفته در برهانش را می توانیم برای محاسبه $\sigma(S^{n-1})$ به ازای همه n ها بر حسب تابع گاما به کار ببریم.

$$\sigma(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad \text{۲.۵۴ گزاره}$$

برهان. بنابر نتیجه ۲.۵۱، گزاره ۲.۵۳ و جایگزینی $S = r^2$

$$\begin{aligned} \pi^{\frac{n}{2}} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr \\ &= \frac{\sigma(S^{n-1})}{2} \int_0^\infty S^{\frac{(n-1)}{2}} e^{-S} dS = \frac{\sigma(S^{n-1})}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right). \end{aligned}$$

۲.۵۵ نتیجه. اگر $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ ، آنگاه $m(B^n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$

برهان. بنا بر تعریف σ ، $m(B^n) = n^{-1}\sigma(S^{n-1})$ و بنابر معادله تابعی برای گاما داریم:

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}n)} = \Gamma(\frac{1}{2}n + 1).$$

در بند ۲.۳ مشاهده کردیم که $\Gamma(n) = (n-1)!$ اکنون می‌توانیم تابع گاما را در نیمه بازه‌ها نیز برآورد کنیم.

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \dots (\frac{1}{2})\sqrt{\pi}.$$

برهان. بنا بر معادله تابعی داریم:

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \dots (\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}),$$

و بنا بر گزاره ۲.۵۳ و با جایگزینی $S = r^2$ داریم:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} e^{-s} ds = 2 \int_0^\infty e^{-r^2} dr = \int_{-\infty}^\infty e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}.$$

یک نتیجه سرگرم کننده گزاره ۲.۵۶ و فرمول $\Gamma(n) = (n-1)!$ این است که اندازه سطحی کره واحد و اندازه لبگ گوی واحد در \mathbb{R}^n همواره مضارب گویایی از توان‌های صحیح π هستند و وقتی n به ۲ افزایش می‌یابد توان π به ۱ افزایش می‌یابد.

تمرین‌ها

۶۲) اندازه σ روی S^{n-1} تحت دوران پایا است.

۶۳) تکنیک به کار رفته برای برهان گزاره ۲.۵۴ را می‌توان در مورد انتگرال هر چند جمله‌ای روی S^{n-1} به کار برد. در واقع، فرض کنید $f(x) = \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}$ ، $(\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ یک چند جمله‌ای تکین باشد. در این صورت $\int f d\sigma = 0$ اگر و فقط اگر هر α_j فرد باشد و چنانچه همه α_j ها زوج باشند،

$$\int f d\sigma = \frac{\Gamma(\beta_1) \dots \Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\beta_1 + \dots + \beta_n)}$$

که در آن $\beta_j = \frac{\alpha_j + 1}{2}$

۶۴) به ازای چه مقادیر حقیقی از a و b ، $|x|^a |\log|x||^b$ روی $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \frac{1}{4}\}$ انتگرال پذیر است؟ روی $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 2\}$ چطور؟

۶۵) $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را به صورت $G(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta) = (x_1, \dots, x_n)$ تعریف کنید که در آن
 $x_1 = r \cos \phi_1, \quad x_2 = r \sin \phi_1 \cos \phi_2, \quad x_3 = r \sin \phi_1 \sin \phi_2 \sin \phi_3, \dots,$
 $x_{n-1} = r \sin \phi_1 \dots \sin \phi_{n-2} \cos \theta, \quad x_n = r \sin \phi_1 \dots \sin \phi_{n-2} \sin \theta.$

الف) G ، \mathbb{R}^n را بروی \mathbb{R}^n می نگارند، و n .

ب) $\det D_{(r, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta)} G = r^{n-1} \sin^{n-2} \phi_1 \sin^{n-3} \phi_2 \dots \sin \phi_{n-2}$

ج) فرض کنید $\Omega = (0, \infty) \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$ در این صورت $G|_{\Omega}$ یک دیفئومورفیسم است و

$$m(\mathbb{R}^n \setminus G(\Omega)) = 0.$$

د) فرض کنید $F(\phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta) = G(1, \phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta)$ و $\Omega' = (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$ در این صورت $(F|_{\Omega'})^{-1}$ بر S^{n-2} به جز بر یک مجموعه σ - بوج یک دستگاه مختصات تعریف می کند، و در این مختصات اندازه σ به وسیله فرمول زیر داده می شود:

$$d\sigma(\phi_1, \dots, \phi_{n-2}, \theta) = \sin^{n-2} \phi_1 \sin^{n-3} \phi_2 \dots \sin \phi_{n-2} d\phi_1 \dots d\phi_{n-2} d\theta.$$

۲.۸ ملاحظات و مراجع

تا حدی می توان گفت که تاریخ نظریه اندازه و انتگرال مدرن با انتشار رساله دکترای لیبگ [۹۱] در ۱۹۰۲ آغاز شده است، هرچند لیبگ آن را بر اساس کارهای قدیمی ریاضیدانان دیگر بنا نهاده بود و برخی از حکم‌های وی مستقیماً توسط ویتالی و دبلیو. اچ. یانگ به دست آمده بود.

نظریه انتگرال لیبگ در مقیاس وسیع توسط تعدادی از ریاضیدان‌ها در دهه بعد از وی مورد بررسی قرار گرفت که طی این دوره اکثر نتایج این فصل نخست استخراج شده بود. به ویژه خود لیبگ قضیه همگرایی مغلوب را اثبات کرده و قضیه همگرایی یکنوا را در حالتی که حد تابع f انتگرال پذیر بود از آن نتیجه گرفته بود؛ وقتی $\int f = \infty$ قضیه اخیر به بی. لویی نسبت داده شده است. لیبگ [۹۲] اندازه‌های کلی تری روی \mathbb{R}^n (که آنها را توابع مجموعه‌ای جمعی نامید) در ارتباط با مسئله تعمیم نمادگذاری انتگرال‌های نامتعارف به توابع چندمتغیره، مورد مطالعه قرار داد. سپس رادون [۱۱۱] نظریه انتگرال نسبت به آنچه که هم اکنون ما اندازه‌های برل منظم روی \mathbb{R}^n می نامیم را مورد بررسی قرار داد، که در حالت خاص $n = 1$ انتگرال‌های لیبگ - اشتیلیس را به دست می دهد.

بالاخره در ۱۹۱۵ فرشه [۵۳] نشان داد که تعدادی از ایده‌های رادون در وضع کلی مجموعه‌هایی که به σ -جبرها مجهزند کار می‌کند. بدین ترتیب اندازه مجرد و نظریه انتگرال شکل گرفت. تحقیقات تا حدود سال ۱۹۵۰ ادامه یافت، کمابیش شکلی از نظریه که امروز در دست ما است پیش بینی شده بود. نخستین رساله مدرن و منظم هالمون [۶۲] می‌باشد. برای اطلاع از تاریخچه انتگرال، هاوکینز [۷۰] را ببینید. مراجع مربوط به تحقیقات اخیر را می‌توان در ساک [۱۲۸] و هان و روزشال [۶۱] یافت. دیدگاه شروع با اندازه‌ها و استخراج انتگرال‌ها از آنها را پذیرفته‌ایم. اما روش‌های نیز برای رسیدن به تعریف انتگرال وجود دارد. روایی که نخستین بار توسط دانیل [۲۹] مورد بررسی قرار گرفت قطع نظر از جزئیات، با یک «انتگرال مقدماتی» شروع شدند: یک تابع خطی مانند I که بر فضای مناسبی از توابع تعریف شده است و در برخی شرایط در پیوستگی نرم صدق می‌کند و مثبت می‌باشد به این معنا که $I(f) \geq 0$ هرگاه $f \geq 0$. برای مثال، انتگرال ریمن بر فضای توابع پیوسته روی $[a, b]$ نظریه دانیل توسیعی از I به یک تابع مانند \bar{I} مهیا می‌کند که بر رده بزرگتری از توابع تعریف شده است. در این حالت تحت مفروضاتی خاص، گردایه \mathcal{M} مرکب از مجموعه‌های E به قسمی که χ_E در دامنه \bar{I} باشد یک σ -جبر است. تابع $\mu(E) = \bar{I}(\chi_E)$ یک اندازه روی \mathcal{M} است و \bar{I} نسبت به μ انتگرال پذیر است. برای شرح مختصری از نظریه دانیل، رودین [۱۲۱] را ببینید.

نظریه لبگ آخرین حرف درباره انتگرال روی \mathbb{R} نیست. تا حدودی مسئله اثبات قضیه اساسی حسابان تا سرحد امکان (که درباره اش در بند ۳.۶ مطالب بیشتری خواهیم گفت) موجب شده است که تعدادی نظریه انتگرال بنا شود که نه تنها انتگرال لبگ بلکه انتگرال‌های «همگرای مشروط» معینی را نیز شامل شود، یعنی، برای توابع اندازه‌پذیر معینی چون $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک معنی به $\int f(x) dx$ اختصاص می‌دهند به طوری که $\int f^+ = \int f^- = \infty$ ، اما برای چه مقادیر مثبت و منفی معقولی از $\int f(x) dx$ به دست می‌دهد. (یک مثال متعارف $f(x) = x^{-1} \sin x$ ؛ تمرین ۵۹ را ببینید.) اولین گام‌ها برای تعریف چنین انتگرالی به دنجوی و پرون نسبت داده شده است که انتگرال‌های نسبتاً پیچیده‌ای بودند. اما در سال ۱۹۵۰ هِنسِتوک و کورزویل مستقلاً تعدیل شده‌ای از انتگرال ریمن کلاسیک را کشف کردند که همان نتایج را به دست می‌داد. انتگرال هِنسِتوک - کورزویل روی یک بازه کراندار مانند $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌شود: یک افراز برجسب‌دار از $[a, b]$ دنباله‌ای متناهی مانند $\{x_j\}_0^N$ است به طوری که $a < x_0 < \dots < x_N < b$ (یعنی، افرازی به همان معنی گفته شده در بند ۲.۳) همراه با دنباله دیگری مانند $\{t_j\}_1^N$ به طوری که $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$.

یک مقیاس روی $[a, b]$ تابعی (دل‌خواه!) چون $\delta: [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ است. هرگاه P یک افراز برجسب‌دار و δ یک مقیاس باشد، P را یک افراز برجسب‌دار و δ یک مقیاس باشد، P را δ -ظریف نامیم هرگاه برای هر j ، $x_j - x_{j-1} < \delta(t_j)$ باشد. فشردمی $[a, b]$ به آسانی ایجاب می‌کند که برای δ یک افراز برجسب‌دار برای $[a, b]$ وجود داشته باشد. حال فرض می‌کنیم f تابعی حقیقی روی $[a, b]$ باشد. اگر P یک افراز برجسب‌دار $[a, b]$ باشد، آنگاه مجموع ریمن متناظر به آن برای f عبارت است از $\sum P f = \sum f(t_j)(x_j - x_{j-1})$. تابع f روی $[a, b]$ انتگرال‌پذیر هِنسِتوک - کورزویا نامیده می‌شود هرگاه عددی چون $c \in \mathbb{R}$ با خاصیت زیر وجود داشته باشد:

برای هر $\varepsilon > 0$ مقیاسی چون δ_ε وجود داشته باشد به طوری که اگر P هر افراز δ_ε -ظریف از $[a, b]$ بود، آنگاه $|\sum p f - c| < \varepsilon$ در این حالت عدد c یکتا است و انتگرال هنستوک - کورزویل f نامیده می شود.

در مقام قیاس، انتگرال ریمان معمولی f را می توان درست به همین روش تعریف کرد با این تفاوت که مجبوریم فقط از مقیاس های ثابت استفاده کنیم. بعداً معلوم شد که انتگرال هنستوک - کورزویل با انتگرال دنجوی و پرون همخوانی دارد. به ویژه، در مورد توابع نامنفی با انتگرال لبگ هم همخوانی دارد، اما دامنه اش حاوی تعدادی از توابعی است که هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی می گیرند و در $L^1([a, b])$ نیستند. تعریف انتگرال هنستوک - کورزویل را به آسانی می توان به بازه های بی کران تعمیم داد. این نوع انتگرال یک نسخه n -بعدی هم دارد؛ به سادگی یک n -بازه را حاصل ضربی از n بازه یک بعدی و یک افراز برجسب دار از یک n -بازه مانند I را گردایه ای متناهی مانند $\{I_j\}$ مرکب از n -بازه ها با درون های مجزا که اجتماعشان I است به همراه انتخابی چون $t_j \in I_j$ برای هر j تعریف می کنیم؛ در این صورت تعریف انتگرال به صورت فوق عمل می کند.

حالتی را می توان ذکر کرد که انتگرال هنستوک - کورزویل نظریه انتگرال گیری روی \mathbb{R}^n می شود و برای دانشجویان کل گویی است، نه تنها به دلیل آنکه کلیت به آن افزوده شده بلکه (بیشتر) به این خاطر که تعریفش نسبتاً ساده است و برای رسیدن به حالت استاندارد نیازی به نظریه اندازه ندارد. از سوی دیگر، این طور نیست که به آسانی به فضاهایی غیر از \mathbb{R}^n تعمیم یابد. به رغم آنکه می توان آن را در جای مجرد دیگری توسعه داد، خیلی از سادگی خوشایند اینجا را از دست می دهد. به علاوه، علی رغم اینکه قبلاً نمی توانستیم انتگرال های همگرای مشروط را با یک روال حدگیری ساده از روی انتگرال های همگرای مطلق به دست آوریم اکنون در مسائل معینی این کار شدنی است اما فواید آن به قدر کافی تمام و کمال نیست که بدون مطالعه حالت خاص به حالت کلی و قاطع بپردازیم.

در هر صورت، در این کتاب به انتگرال لبگ و نظریه کلی اندازه و انتگرال که بخشی از آن است بسنده خواهیم کرد. خوانندگانی که می خواهند مطالب بیشتری در مورد انتگرال هنستوک - کورزویل بیاموزند می توانند مقدمه ای کوتاه را در بارتل [۱۳] و مطالب مفصل تری را در ام سی لئود [۹۹] و پی فیر [۱۰۹] بیابند. برای تشریح انتگرال های دنجوی، پرون و هنستوک - کورزویل روی $[a, b]$ بهتر است گوردین [۵۷] را ببینید. برای اطلاع از چگونگی شکل گیری نظریه در حالت بسیار مجرد بهتر است هنستوک [۷۲] را ببینید.

بند ۲.۱: یک ایزومورفیسم برل بین دو فضای اندازه پذیر (X, \mathcal{M}) و (Y, \mathcal{N}) یک دوسویی مانند $f: X \rightarrow Y$ است به طوری که f^{-1} یک دوسویی از \mathcal{N} به \mathcal{M} است. بر خلاف مفهوم همیومورفیسم فضاهای توپولوژیک (فصل ۴) و مفاهیم ایزومورفیسم در رشته های گوناگون دیگر، مفهوم ایزومورفیسم برل ثمرات محدودی دارد زیرا ایزومورفیسم برل بودن دو فضا بسیار آسان رخ می دهد. صحت چنین چیزی حکایت از قضیه ای دارد که به کوراتوفسکی منسوب است:

فرض کنیم (X, \mathcal{M}) با زیرمجموعه برلی چون E از یک فضای متری جدایی پذیر کاملی چون Y (که مجهز به σ -جبر $\{f \in \mathcal{B}_Y : F \subset E\}$ است) ایزومورفیسم برل باشد. در این صورت یا X شمارش پذیر است و $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ یا X با $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ ایزومورفیسم برل است.

برهانی از این قضیه و نیز اطلاعات بیشتری در مورد مجموعه‌های برل را می‌توان در اسبرواستا [۱۳۹] یافت.
 ...سلسله مراتبی از توابع اندازه‌پذیر برل روی یک فضای متری که تقریباً با سلسله مراتب مجموعه‌های برل (باز، بسته، F_σ و G_δ و غیره) متناظر است. به عبارت دیگر، فرض کنید B_α فضای همه توابع پیوسته باشد و برای هر آر دینال شمارش‌پذیر مانند α ، B_α را به‌طور استقرایی چنین تعریف کنید: اگر α مقدم بلافاصلی مثل β داشته باشد، B_α مجموعه همه حدود دنباله‌های همگرایی نقطه‌ای در B_β است؛ در غیر این صورت $B_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} B_\beta$. گفته می‌شود که توابع B_α از کلاس بر α هستند. برای مثال، اگر f تابع همه‌جا مشتق‌پذیری روی \mathbb{R} باشد، f' از کلاس بر است.

تمرین ۱۱ حکمی از نخستین مقاله منتشر شده توسط لیگ است. برای بحث در مورد آن، رودین [۱۲۳] را ببینید.
 بند ۲.۳: چشم‌پوشی از تفاوت بین توابع اندازه‌پذیر خاص و کلاس‌های هم‌ارزی توابع تعریف شده به صورت تساوی تقریباً همه‌جایی، اغلب موجب تسهیل کارها می‌شود و به‌ندرت مخرب است. مهمترین جایی که باید مراقب بود جایی است که تأثیر متقابل توابع اندازه‌پذیر و پیوسته (مثلاً روی \mathbb{R}^n) دخیل است زیرا تابعی که تقریباً همه‌جا با یک تابع پیوسته برابر است، در حالت کلی پیوسته نخواهد بود. شرح دقیقی از این نکته را در [۱۶۵] ببینید.

بند ۲.۴: شرح جالبی از قضیه ایگورف که متضمن برخی شرایط لازم و کافی برای همگرایی تقریباً یکنواخت است در بارتل [۱۲] یافت می‌شود. برای دسترسی به برهانی ساده از قضیه لوزین (تمرین ۴۴) که مستقل از قضیه ایگورف باشد، فلد من [۳۳] را ببینید. در بند ۷.۲ حالت کلی‌تری از این قضیه را ثابت خواهیم کرد.

بند ۲.۵: فضایی اولیه فوبینی و تونلی به اندازه لبگ در صفحه مربوط می‌شوند. نظریه اندازه‌های حاصلضربی مجرد به‌طور مستقل توسط چندین نفر در سال ۱۹۳۰ بنا نهاده شد؛ نحوه ساختی از $\mu \times \nu$ که در این کتاب ارائه شد از آن‌ها [۶۰] است. یک اندازه حاصلضربی نیز روی حاصلضرب خانواده‌ای نامتناهی مانند $\{(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ مرکب از فضاهای اندازه قابل تعریف است مشروط بر اینکه $\mu_\alpha(X_\alpha) = 1$ برای همه به جز تعدادی متناهی از α ها برقرار باشد؛ ساکی [۱۲۷]، هالموس [بند ۲۸ از ۶۳] یا استرامبرگ [بند ۲۲ از ۷۶] را ببینید. نسخه‌ای از این حکم را در بند ۷.۴ خواهیم آورد (قضیه ۷.۲۸).
 با استفاده از اصل انتخاب و بدون به‌کارگیری فرضیه پیوستار، سرینسکی [۱۳۴] وجود زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R}^2 را ثابت کرد که اندازه‌پذیر لبگ نیست و مقطعش با هر خط راست حداکثر دو نقطه دارد. این موضوع بایستی با مرین [۴۷] (که آن را هم به سرینسکی نسبت داده‌اند) مقایسه شود.

تعمیم زیرین از مفهوم اندازه حاصلضربی بعضی جاها مفید واقع می‌شود:

چنانچه فضای اندازه‌پذیری چون (X, \mathcal{M}) ، یک فضای σ -متناهی مانند (Y, \mathcal{N}, ν) و خانواده‌ای چون $\{\mu_\gamma : \gamma \in Y\}$ از اندازه‌های متناهی روی X داده شود به‌طوری که تابع $\mu_\gamma(E) \mapsto \gamma$ برای هر $E \in \mathcal{M}$ روی Y اندازه‌پذیر باشد؛ می‌توان اندازه‌های چون λ روی $X \times Y$ تعریف کرد به‌طوری که

$$\int f d\lambda = \iint f(x, y) d\mu_\gamma(x) d\nu(y)$$

برای هر $f \in L^+(X \times Y)$ برقرار باشد. جانسون [۷۹] را ببینید.

بند ۲.۶ : برهانی که برای قضیه ۲.۴۷ آورده‌ایم از جی. شوارتز [۱۳۱] است. این قضیه را با قدری مفروضات ضعیف‌تر روی G نیز می‌توان ثابت کرد؛ رودین [۱۲۵، قضیه ۷.۲۶] را ببینید.

۷۱

تاریخ: ...

فصل سوم

اندازه‌های علامت دار و مشتق‌گیری

موضوع اصلی این فصل مفهوم مشتق اندازه‌های مانند ν نسبت به اندازه دیگری چون μ روی یک σ -جبر است. نخست این کار را در سطح مجرد انجام می‌دهیم، سپس در حالتی که μ اندازه لیگ روی \mathbb{R} است، نتیجه بسیار ظریفی به دست می‌آوریم. هنگامی که نتیجه به حالت $n = 1$ منحصر می‌شود، به همراه نظریه متغیر حقیقی کلاسیک نوعی از قضیه اساسی حسابان برای انتگرال‌های لیگ تولید می‌شود. در بررسی این مسئله، تعمیم مفهوم اندازه مفید است مثلاً «اندازه‌ها می‌توانند مقادیر منفی یا حتی مقادیر مختلط بپذیرند». برای این کار سه دلیل وجود دارد. اولاً، در کاربردها، چنین «اندازه‌های علامت‌داری» می‌توانند مبنای چیزهایی از قبیل بار الکتریکی باشند که می‌توانند مثبت یا منفی باشند. دوّمأ، ورود به نظریه مشتق به‌طور خیلی طبیعی و کلی‌تر انجام می‌شود. بالاخره اندازه‌های مختلط دارای یک مضمون تحلیلی-تابعی است که در فصل ۷ تشریح خواهد شد.

۳.۱ اندازه‌های علامت‌دار

فرض کنید (X, \mathcal{M}) یک فضای اندازه‌پذیر باشد. یک اندازه علامت‌دار روی (X, \mathcal{M}) تابعی چون $\nu: \mathcal{M} \rightarrow [-\infty, \infty]$ است به قسمی که

$$\nu(\emptyset) = 0$$

ν حداکثر یکی از مقادیر $\pm\infty$ را می‌پذیرد؛

اگر $\{E_j\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در \mathcal{M} باشند، آنگاه

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$$

که در آن مجموع اخیر همگرایی مطلق است هرگاه $\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)$ متناهی باشد.

بنابر این هر اندازه یک اندازه علامت دار است؛ گاهی برای تاکید از اندازه‌ها تحت عنوان اندازه‌های مثبت یاد خواهیم کرد. دو مثال از اندازه‌های علامت دار سریعاً به ذهن می‌رسد. نخست، اگر μ_1 و μ_2 دو اندازه روی M بوده و حداقل یکی از آنها متناهی باشد، آنگاه $\nu = \mu_1 - \mu_2$ یک اندازه علامت دار است دوم، اگر μ یک اندازه روی M باشد و $f: X \rightarrow [-\infty, \infty]$ تابعی باشد به قسمی که حداقل یکی از انتگرال‌های $\int f^+ d\mu$ و $\int f^- d\mu$ متناهی باشد (در این حالت f را μ -انتگرال پذیر توسیع یافته می‌نامیم)، آنگاه تابع مجموعه ν که با $\nu(E) = \int_E f d\mu$ تعریف می‌شود یک اندازه علامت دار است. در واقع، به‌طور خلاصه خواهیم دید که حقیقتاً همین مثال‌ها وجود دارند: هر اندازه علامت دار را می‌توان به یکی از دو صورت فوق بیان کرد.

۳.۱ گزاره. فرض کنیم ν یک اندازه علامت دار روی (X, M) باشد. اگر $\{E_j\}$ یک دنباله در M باشد، آنگاه

$$\nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \nu(E_j)$$

$$\nu(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \nu(E_j)$$

اساساً برهان همان برهان اندازه‌های مثبت است (قضیه ۱.۸) و به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۱).

اگر ν یک اندازه علامت دار روی (X, M) ، مجموعه‌ای چون $E \in M$ را مثبت (متناظراً منفی، بوج) نسبت به ν نامیم در صورتی که $\nu(F) \geq 0$ (متناظراً $\nu(F) \leq 0$) به ازای هر $F \in M$ که $F \subset E$ باشد.

(بنابر این در مثال $\nu(E) = \int_E f d\mu$ که در فوق توصیف شد، E مثبت، منفی، بوج است دقیقاً وقتی که $f \geq 0$ ، $f \leq 0$ ، $f \geq 0$ بر E .)

۳.۲ لم. هر زیرمجموعه اندازه پذیر از یک مجموعه مثبت، مثبت است و اجتماع هر خانواده شمارش پذیر از مجموعه‌های مثبت، مثبت می‌باشد.

برهان. حکم نخست از تعریف مثبت بودن واضح است. چنانچه P_1, P_2, \dots مجموعه‌هایی مثبت باشند، فرض کنید

$$Q_n = P_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} P_j$$

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \text{ اگر } Q_n \subset P_n \text{ پس } Q_n \text{ مثبت است. از این رو اگر } E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j \text{، آنگاه}$$

$$\nu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E \cap Q_j) \geq 0$$

که همان مطلوب است. ■

۳.۳ قضیه تجزیه هان. چنانچه ν یک اندازه علامت دار روی (X, M) باشد، مجموعه مثبتی چون P و مجموعه‌ای منفی

مانند N نسبت به ν وجود دارد به قسمی که $P \cup N = X$ و $P \cap N = \emptyset$ اگر N', P' زوج دیگری با خاصیت مذکور

باشد، آنگاه $P \Delta P' (= N \Delta N')$ نسبت به ν بوج است.

برهان. بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم که ν مقدار $+\infty$ را نمی‌گیرد. (در غیر این صورت ν را در نظر می‌گیریم.) فرض کنید m سوپرهم $\nu(E)$ باشد وقتی که E همهٔ مجموعه‌های مثبت را می‌پیماید؛ از این رو دنباله‌ای چون $\{P_j\}$ از مجموعه‌های مثبت هست که $m \rightarrow \nu(P_j)$ فرض کنید $P = \bigcup_1^\infty P_j$. بنا بر لم ۳.۲ و گزاره ۳.۱، P مثبت است و $\nu(P) = m$ ؛ به‌ویژه $m < \infty$. ادعا می‌کنیم که $N = X \setminus P$ منفی است. بدین منظور فرض می‌کنیم که N منفی نباشد و یک تناقض به دست می‌آوریم. اولاً، توجه کنید که N نمی‌تواند هیچ مجموعهٔ مثبت غیر پوچی را شامل شود. در واقع، اگر $E \subset N$ مثبت باشد و $\nu(E) > 0$ ، آنگاه $E \cup P$ مثبت است و $\nu(E \cup P) = \nu(E) + \nu(P) > m$ و این امکان‌پذیر نیست.

ثانیاً، اگر $A \subset N$ و $\nu(A) > 0$ ، آنگاه زیرمجموعه‌ای چون $B \subset A$ وجود دارد که $\nu(B) > \nu(A)$ ، در واقع، چون N نمی‌تواند مثبت باشد، $C \subset A$ ای هست که $\nu(C) < 0$ ؛ لذا اگر $B = A \setminus C$ ، آنگاه داریم

$$\nu(B) = \nu(A) - \nu(C) > \nu(A).$$

اگر N منفی نباشد، آنگاه می‌توانیم به صورت زیر، دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های $\{A_j\}$ از N و دنباله‌ای مانند $\{n_j\}$ از اعداد صحیح مثبت مشخص کنیم: n_j را کوچکترین عدد صحیحی در نظر می‌گیریم که برای مجموعه‌ای چون $B \subset N$ داشته باشیم $\nu(B) > n_j^{-1}$ و A_j را یکی از این مجموعه‌ها می‌گیریم. با روال استقرایی، n_j کوچکترین عدد صحیحی است که برای مجموعه‌ای چون $B \subset A_{j-1}$ داشته باشیم $\nu(B) > \nu(A_{j-1}) + n_j^{-1}$ و A_j یکی از این مجموعه‌ها است. قرار می‌دهیم $A = \bigcap_1^\infty A_j$ در این صورت $\sum_1^\infty n_j^{-1} > \lim \nu(A_j) > \nu(A) > \infty$ ، لذا $n_j \rightarrow \infty$ وقتی $j \rightarrow \infty$. اما باز هم $A \subset B$ ای وجود دارد که به ازای عدد صحیحی چون n ، $\nu(B) > \nu(A) + n^{-1}$. چنانچه j به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، داریم $n < n_j$ و $B \subset A$ که نحوهٔ ساخت n_j و A_j را نقض می‌کند. بنا بر این، فرض اینکه N منفی نیست باطل است. بالاخره، اگر P', N' زوج دیگری باشد که در حکم قضیه صدق کند، داریم $P \setminus P' \subset P$ و $P \setminus P' \subset N'$ ، لذا $P \setminus P'$ هم مثبت و هم منفی است و در نتیجه پوچ می‌باشد؛ به‌طور مشابه $P \setminus P'$ نیز چنین است. ■

تجزیهٔ $X = P \cup N$ که در آن P یک مجموعهٔ مثبت و N یک مجموعهٔ منفی است تجزیهٔ هان برای ν نامیده می‌شود. معمولاً این تجزیه یکتا نیست (مجموعه‌های ν -پوچ می‌توانند از P به N یا N به P منتقل شوند)، اما تجزیهٔ هان منجر به نمایشی از ν به صورت تفاضل دو اندازهٔ مثبت می‌شود.

برای بیان این حکم به مفهوم جدیدی نیاز داریم: گوییم دو اندازهٔ علامت‌دار μ و ν بر (X, \mathcal{M}) دو به دو منفرد هستند یا ν نسبت به μ منفرد است یا برعکس، در صورتی که $E, F \in \mathcal{M}$ ای وجود داشته باشند به قسمی که $E \cap F = \emptyset$ ، $E \cup F = X$ ، نسبت به μ پوچ باشد و F نسبت به ν پوچ باشد. به بیان نادقیق، دو به دو منفرد بودن μ و ν به این معنا است که X به دو مجموعهٔ مجزای μ -پوچ و ν -پوچ افزایش می‌شود. این رابطه را با علامت عمود بودن بیان می‌کنیم:

$$\mu \perp \nu$$

۳.۴ قضیه تجزیه جردن. اگر ν یک اندازه علامت‌دار باشد، اندازه‌های مثبت یکتایی چون ν^+ و ν^- وجود دارند به طوری که $\nu = \nu^+ - \nu^-$ و $\nu^+ \perp \nu^-$.

برهان. فرض کنید $X = P \cup N$ یک تجزیه هان برای ν است و تعریف کنید:

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P), \nu^-(E) = -\nu(E \cap N).$$

در این صورت واضح است که $\nu = \nu^+ - \nu^-$ و $\nu^+ \perp \nu^-$. چنانچه $\mu^+ = \mu^- - \mu$ و $\nu = \mu^+ - \mu^-$ فرض می‌کنیم به E و $F \in \mathcal{M}$ چنان باشد که $E \cap F = \emptyset$ ، $E \cup F = X$ ، $E \cap P = \emptyset$ و $F \cap N = \emptyset$ ، $\mu^+(E) = \mu^-(F)$ و $\mu^-(E) = \mu^+(F)$ (بر این صورت $X = E \cup F$ تجزیه هان دیگری برای ν است، لذا $\nu = \nu^+ - \nu^- = \mu^+ - \mu^-$ بوجه است. از این رو، به ازای هر $A \in \mathcal{M}$ ،

$$\mu^+(A) = \mu^+(A \cap E) = \nu(A \cap E) = \nu(A \cap P) = \nu^+(A)$$

و به طور مشابه $\mu^- = \nu^-$.

اندازه‌های ν^+ و ν^- تغییرات مثبت و منفی ν نامیده می‌شوند و $\nu = \nu^+ - \nu^-$ ، بنا بر تشابه با نمایش یک تابع با تغییر کراندار بر \mathbb{R} به صورت تفاضل دو تابع صعودی، تجزیه جردن ν نامیده می‌شود. (۳.۵ را ببینید). به علاوه تغییر کل ν را اندازه $|\nu|$ تعریف می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-$$

به آسانی معلوم می‌شود که $E \in \mathcal{M}$ یک مجموعه ν -بوجه است اگر و فقط اگر $|\nu|(E) = 0$ و $\nu \perp \mu$ اگر و فقط اگر

$$|\nu| \perp \mu \text{ اگر و تنها اگر } \nu \perp \mu \text{ و } \nu^- \perp \mu \text{ (تمرین ۲)}$$

ملاحظه می‌کنیم که اگر ν مقدار ∞ را نگیرد، آنگاه $\nu^+(X) = \nu(P) < \infty$ ، پس ν^+ یک اندازه مثبت است و ν از بالا به $\nu^+(X)$ کراندار است؛ به طور مشابه اگر ν مقدار $-\infty$ را نگیرد چنین حکمی را داریم. به ویژه، اگر برد ν در \mathbb{R} مشمول باشد، آنگاه ν کراندار است. همچنین مشاهده می‌کنیم که ν به شکل $\nu(E) = \int_E f d\mu$ است که در آن $\mu = |\nu|$ ،

$$X = P \cup N \text{ و } f = \chi_P - \chi_N \text{ یک تجزیه هان برای } \nu \text{ می‌باشد.}$$

انتگرال گیری نسبت به یک اندازه علامت‌دار مانند ν به روش بدیهی تعریف می‌شود. قرار می‌دهیم:

$$L^1(\nu) = L^1(\nu^+) \cap L^1(\nu^-),$$

$$\int f d\mu = \int f d\nu^+ - \int f d\nu^- \quad (f \in L^1(\nu))$$

یک اصلاح مختصر: اندازه علامت‌داری چون ν متناهی (متناظر σ -متناهی) نامیده می‌شود هرگاه $|\nu|$ متناهی (متناظر σ -

فصل سوم

اندازه‌های علامت دار و مشتق‌گیری

موضوع اصلی این فصل مفهوم مشتق اندازه‌ای مانند ν نسبت به اندازه دیگری چون μ روی یک σ -جبر است. نخست این کار را در سطح مجرد انجام می‌دهیم، سپس در حالتی که μ اندازه لبگ روی \mathbb{R}^n است، نتیجه بسیار ظریفی به دست می‌آوریم. هنگامی که نتیجه به حالت $n = 1$ منحصر می‌شود، به همراه نظریه متغیر حقیقی کلاسیک نوعی از قضیه اساسی حسابان برای انتگرال‌های لبگ تولید می‌شود. در بررسی این مسئله، تعمیم مفهوم اندازه مفید است مثلاً «اندازه‌ها می‌توانند مقادیر منفی یا حتی مقادیر مختلط بپذیرند». برای این کار سه دلیل وجود دارد. اولاً، در کاربردها، چنین «اندازه‌های علامت‌داری» می‌توانند مبنای چیزهایی از قبیل بار الکتریکی باشند که می‌توانند مثبت یا منفی باشند. دواماً، ورود به نظریه مشتق به‌طور خیلی طبیعی و کلی‌تر انجام می‌شود. بالاخره اندازه‌های مختلط‌داری یک مضمون تحلیلی-تابعی است که در فصل ۷ تشریح خواهد شد.

۳.۱ اندازه‌های علامت‌دار

فرض کنید (X, \mathcal{M}) یک فضای اندازه‌پذیر باشد. یک اندازه علامت‌دار روی (X, \mathcal{M}) تابعی چون $\nu: \mathcal{M} \rightarrow [-\infty, \infty]$ است به قسمی که

$$\nu(\emptyset) = 0$$

• ν حداکثر یکی از مقادیر $\pm\infty$ را می‌پذیرد؛

• اگر $\{E_j\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در \mathcal{M} باشند، آنگاه

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$$

که در آن مجموع اخیر همگرایی مطلق است هرگاه $\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)$ متناهی باشد.

(۱۶) فرض کنید μ و ν اندازه‌هایی σ -متناهی روی (X, \mathcal{M}) باشند که $\mu \ll \nu$ ، سپس قرار دهید $\lambda = \mu + \nu$. اگر

$$f = \frac{d\nu}{d\lambda}, \text{ آنگاه } 0 \leq f < 1 \text{ و } \frac{d\nu}{d\mu} = \frac{f}{1-f}$$

(۱۷) فرض کنیم (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای σ -متناهی، \mathcal{N} یک زیر σ -جبر از \mathcal{M} باشد و $\mu|_{\mathcal{N}} = \nu$. فرض کنید ν نیز σ -متناهی است. (این فرض الزامی است: برای مثال μ را اندازه لبگ روی \mathbb{R} و \mathcal{N} را σ -جبر شمارش‌پذیر یا متمم شمارش‌پذیر از مجموعه‌ها بگیرید.) اگر $f \in L^1(\mu)$ ، آنگاه عضوی چون $g \in L^1(\nu)$ وجود دارد (لذا $g \in \mathcal{N}$ -اندازه‌پذیر است) به طوری که برای هر $E \in \mathcal{N}$ ، $\int_E f d\mu = \int_E g d\nu$ ؛ اگر g' تابع دیگری از این سنخ باشد، آنگاه $g = g'$ ν -ت. ه. (در نظریه احتمال، g امید شرطی f روی \mathcal{M} نامیده می‌شود).

۳.۳ اندازه‌های مختلط

یک اندازه مختلط روی فضای اندازه‌پذیری مانند (X, \mathcal{M}) نگاهی چون $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M} : \nu$ است به طوری که:

- $\nu(\emptyset) = 0$ ؛
- اگر $\{E_j\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزای واقع در \mathcal{M} باشد، آنگاه $\nu(\bigcup_1^\infty E_j) = \sum_1^\infty \nu(E_j)$ ، که در آن سری مذکور مطلقاً همگرا است.

بالاخص، مقادیر نامتناهی پذیرفتنی نیستند، لذا یک اندازه مثبت فقط وقتی یک اندازه مختلط است که متناهی باشد.

مثال: اگر μ اندازه مثبتی باشد و $f \in L^1(\mu)$ ، آنگاه $f d\mu$ یک اندازه مختلط است.

چنانچه ν یک اندازه مختلط باشد، ν_+, ν_- به ترتیب به معنای بخش حقیقی و بخش موهومی ν هستند. بنابراین ν_+, ν_- اندازه‌های علامت‌داری هستند که مقادیر $\pm\infty$ را نمی‌گیرند؛ از این رو این دو اندازه متناهی هستند و لذا ν زیر مجموعه بسته‌ای از \mathcal{C} است.

نمادهایی که برای اندازه‌های علامت‌دار به کار بردیم به آسانی به اندازه‌های مختلط تعمیم می‌یابند. برای مثال، $L^1(\nu)$ را

$$L^1(\nu) \cap L^1(\nu_+) \cap L^1(\nu_-) \text{ تعریف می‌کنیم و برای } f \in L^1(\nu) \text{ قرار می‌دهیم: } \int f d\nu = \int f d\nu_+ - \int f d\nu_-$$

ν و μ اندازه‌های مختلطی باشند، می‌گوییم $\mu \perp \nu$ هرگاه برای $a, b = \tau, i$ ، $\mu_a \perp \mu_b$ و اگر λ یک اندازه مثبت

باشد، می‌گوییم $\lambda \ll \nu$ هرگاه $\lambda \ll \nu_+$ و $\lambda \ll \nu_-$. قضایای بند ۳.۲ نیز تعمیم می‌یابند؛ فقط این قضایا به‌طور

جداگانه برای بخش‌های حقیقی و موهومی به کار می‌روند. بالاخص:

برهان. بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم که ν مقدار $+\infty$ را نمی‌گیرد. (در غیر این صورت ν را در نظر می‌گیریم.) فرض کنید m سوپرهم $\nu(E)$ باشد وقتی که E همهٔ مجموعه‌های مثبت را می‌پیماید؛ از این رو دنباله‌ای چون $\{P_j\}$ از مجموعه‌های مثبت هست که $m \rightarrow \nu(P_j)$ فرض کنید $P = \bigcup_1^\infty P_j$. بنابر لم ۳.۲ و گزارهٔ ۳.۱، P مثبت است و $\nu(P) = m$ ؛ به‌ویژه $m < \infty$. ادعا می‌کنیم که $N = X \setminus P$ منفی است. بدین منظور فرض می‌کنیم که N منفی نباشد و یک تناقض به دست می‌آوریم. اولاً، توجه کنید که N نمی‌تواند هیچ مجموعهٔ مثبت غیر پوچی را شامل شود. در واقع، اگر $E \subset N$ مثبت باشد و $\nu(E) > 0$ ، آنگاه $E \cup P$ مثبت است و $\nu(E \cup P) = \nu(E) + \nu(P) > m$ و این امکان‌پذیر نیست.

ثانیاً، اگر $A \subset N$ و $\nu(A) > 0$ ، آنگاه زیرمجموعه‌ای چون $B \subset A$ وجود دارد که $\nu(B) > \nu(A)$ در واقع، چون A نمی‌تواند مثبت باشد، $C \subset A$ ای هست که $\nu(C) < 0$ ؛ لذا اگر $B = A \setminus C$ ، آنگاه داریم

$$\nu(B) = \nu(A) - \nu(C) > \nu(A).$$

اگر N منفی نباشد، آنگاه می‌توانیم به صورت زیر، دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های $\{A_j\}$ از N و دنباله‌ای مانند $\{n_j\}$ از اعداد صحیح مثبت مشخص کنیم: n_1 را کوچکترین عدد صحیحی در نظر می‌گیریم که برای مجموعه‌ای چون $B \subset N$ داشته باشیم $\nu(B) > n_1^{-1}$ و A_1 را یکی از این مجموعه‌ها می‌گیریم. با روال استقرایی، n_j کوچکترین عدد صحیحی است که برای مجموعه‌ای چون $B \subset A_{j-1}$ داشته باشیم $\nu(B) > \nu(A_{j-1}) + n_j^{-1}$ و A_j یکی از این مجموعه‌ها است. قرار می‌دهیم $A = \bigcap_1^\infty A_j$ در این صورت $\sum_1^\infty n_j^{-1} > \lim \nu(A_j) > \nu(A) > \infty$ ، لذا $n_j \rightarrow \infty$ وقتی $j \rightarrow \infty$. اما باز هم $A \subset B$ ای وجود دارد که به ازای عدد صحیحی چون n ، $\nu(B) > \nu(A) + n^{-1}$. چنانچه j به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، داریم $n_j < n$ و $B \subset A$ که نحوهٔ ساخت n_j و A_j را نقض می‌کند. بنابر این، فرض اینکه N منفی نیست باطل است. بالاخره، اگر P', N' زوج دیگری باشد که در حکم قضیه صدق کنند، داریم $P \setminus P' \subset P$ و $P \setminus P' \subset N'$ ، لذا $P \setminus P'$ هم مثبت و هم منفی است و در نتیجه پوچ می‌باشد؛ به‌طور مشابه $P \setminus P'$ نیز چنین است. ■

تجزیهٔ $X = P \cup N$ که در آن P یک مجموعهٔ مثبت و N یک مجموعهٔ منفی است تجزیهٔ هان برای ν نامیده می‌شود. معمولاً این تجزیه یکتا نیست (مجموعه‌های ν -پوچ می‌توانند از P به N یا N به P منتقل شوند)، اما تجزیهٔ هان منجر به نمایشی از ν به صورت تفاضل دو اندازهٔ مثبت می‌شود.

برای بیان این حکم به مفهوم جدیدی نیاز داریم: گوئیم دو اندازهٔ علامت‌دار μ و ν بر (X, \mathcal{M}) دو به دو منفرد هستند یا ν نسبت به μ منفرد است یا برعکس، در صورتی که $E, F \in \mathcal{M}$ ای وجود داشته باشند به قسمی که $E \cap F = \emptyset$ ، $E \cup F = X$ ، نسبت به μ پوچ باشد و F نسبت به ν پوچ باشد. به بیان نادقیق، دو به دو منفرد بودن μ و ν به این معنا است که X به دو مجموعهٔ مجزای μ -پوچ و ν -پوچ افزایش می‌شود. این رابطه را با علامت عمود بودن بیان می‌کنیم:

$$\mu \perp \nu.$$

۳.۴ قضیه تجزیه جردن. اگر ν یک اندازه علامت‌دار باشد، اندازه‌های مثبت یکتایی چون ν^+ و ν^- وجود دارند به طوری که $\nu = \nu^+ - \nu^-$ و $\nu^+ \perp \nu^-$.

برهان. فرض کنید $X = P \cup N$ یک تجزیه هان برای ν است و تعریف کنید:

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P), \nu^-(E) = -\nu(E \cap N).$$

در این صورت واضح است که $\nu = \nu^+ - \nu^-$ و $\nu^+ \perp \nu^-$. چنانچه $\mu^+ = \nu^+$ و $\mu^- = \nu^-$ فرض می‌کنیم در این صورت واضح است که $\nu = \mu^+ - \mu^-$ و $\mu^+ \perp \mu^-$. بنابراین μ^+ و μ^- برای این صورت $X = E \cup F$ تجزیه هان دیگری برای ν است، لذا $P \Delta E$ بوجه است. از این رو به ازای هر $A \in \mathcal{M}$

$$\mu^+(A) = \mu^+(A \cap E) = \nu(A \cap E) = \nu(A \cap P) = \nu^+(A)$$

و به طور مشابه $\mu^- = \nu^-$.

اندازه‌های ν^+ و ν^- تغییرات مثبت و منفی ν نامیده می‌شوند و $\nu = \nu^+ - \nu^-$ ، بنا بر تشابه با نمایش یک تابع با تغییر کراندار بر \mathbb{R} به صورت تفاضل دو تابع صعودی، تجزیه جردن ν نامیده می‌شود. (۳.۵ را ببینید). به علاوه تغییر کل ν را اندازه $|\nu|$ تعریف می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\nu| = \nu^+ + \nu^-$$

به آسانی معلوم می‌شود که $E \in \mathcal{M}$ یک مجموعه ν -بوجه است اگر و فقط اگر $|\nu|(E) = 0$ و $\nu \perp \mu$ اگر و فقط اگر $\mu \perp |\nu|$ اگر و تنها اگر $\mu \perp \nu$ و $\mu \perp \nu^-$ (تمرین ۲).

ملاحظه می‌کنیم که اگر ν مقدار ∞ را نگیرد، آنگاه $\nu^+(X) = \nu(P) < \infty$ پس ν^+ یک اندازه مثبت است و ν از بالا به $\nu^+(X)$ کراندار است؛ به طور مشابه اگر ν مقدار $-\infty$ را نگیرد چنین حکمی را داریم. به ویژه، اگر برد ν در \mathbb{R} مشمول باشد، آنگاه ν کراندار است. همچنین مشاهده می‌کنیم که به شکل $\nu(E) = \int_E f d\mu$ است که در آن $\mu = |\nu|$ ، $f = \chi_P - \chi_N$ و $X = P \cup N$ یک تجزیه هان برای ν می‌باشد.

انتگرال گیری نسبت به یک اندازه علامت‌دار مانند ν به روش بدیهی تعریف می‌شود. قرار می‌دهیم:

$$L^1(\nu) = L^1(\nu^+) \cap L^1(\nu^-),$$

$$\int f d\mu = \int f d\nu^+ - \int f d\nu^- \quad (f \in L^1(\nu))$$

یک اصلاح مختصر: اندازه علامت‌داری چون ν متناهی (متناظر σ -متناهی) نامیده می‌شود هرگاه $|\nu|$ متناهی (متناظر σ -متناهی) باشد.

تمرین‌ها

(۱) گزاره ۳.۱ را ثابت کنید.

(۲) چنانچه ν یک اندازه علامت‌دار باشد، E یک مجموعه ν بوج است اگر و فقط اگر $\nu(E) = 0$ همچنین اگر ν و μ دو اندازه علامت‌دار باشند، $\mu \perp \nu$ اگر و فقط اگر $\mu \perp \nu^+$ و $\mu \perp \nu^-$.

(۳) فرض کنید ν یک اندازه علامت‌دار روی (X, \mathcal{M}) است.

الف) $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$

ب) اگر $f \in L^1(\nu)$ ، آنگاه $\int |fd\mu| \leq \int |f|d|\nu|$

ج) چنانچه $E \in \mathcal{M}$ ، $\nu(E) = \sup \{ |\int_E fd\nu| : |f| \leq 1 \}$

(۴) اگر ν یک اندازه علامت‌دار باشد و λ و μ اندازه‌هایی مثبت باشند به قسمی که $\nu = \lambda - \mu$ ، آنگاه $\lambda \geq \nu^+$ و $\mu \geq \nu^-$.

(۵) اگر ν_1 و ν_2 دو اندازه علامت‌دار باشند که هر دوی آنها $+\infty$ یا $-\infty$ نشوند، آنگاه $|\nu_1 + \nu_2| \leq |\nu_1| + |\nu_2|$ (از تمرین ۴ استفاده کنید).

(۶) فرض کنید $\nu(E) = \int_E fd\mu$ که در آن μ یک اندازه مثبت و f یک تابع μ -انتگرال پذیر توسیع یافته است. تجزیه ν ، تغییرات مثبت، منفی و کلی ν را برحسب f و μ بیان کنید.

(۷) فرض کنید ν یک اندازه علامت‌دار روی (X, \mathcal{M}) باشد و $E \in \mathcal{M}$.

الف) $\nu^+(E) = \sup \{ \nu(F) : F \in \mathcal{M}, F \subset E \}$ و $\nu^-(E) = -\inf \{ \nu(F) : F \in \mathcal{M}, F \subset E \}$

ب) $|\nu|(E) = \sup \{ \sum_{j=1}^n |\nu(E_j)| : n \in \mathbb{N} \text{ و } E_1, \dots, E_n \text{ جدا از هم هستند و } \bigcup_{j=1}^n E_j = E \}$

۳.۲ قضیه لیگ - رادون - نیکودیم

فرض کنید که ν یک اندازه علامتدار و μ یک اندازه مثبت روی (X, \mathcal{M}) است. گوئیم ν نسبت به μ پیوسته مطلق است و می‌نویسیم $\mu \ll \nu$ هرگاه به ازای هر $E \in \mathcal{M}$ که $\mu(E) = 0$ داشته باشیم $\nu(E) = 0$ به آسانی معلوم می‌شود که $\mu \ll \nu$ اگر و فقط اگر $\mu \ll \nu^+$ و $\mu \ll \nu^-$ (تمرین ۸).
 به مفهومی، پیوستگی مطلق نقطه مقابل دو به دو منفرد بودن است. به طور دقیق‌تر، اگر $\mu \perp \nu$ و $\mu \ll \nu$ ، آنگاه $\nu = 0$ زیرا اگر E و F دو مجموعه مجزا باشند به قسمی که $E \cup F = X$ و $\mu(E) = \nu(F) = 0$ ، آنگاه فرض $\mu \ll \nu$ ایجاب می‌کند که $\nu(E) = 0$ ، که از آن نتیجه می‌شود $\nu = 0$ و لذا $\mu \ll \nu$ می‌توان مفهوم پیوستگی مطلق را به حالتی که μ یک اندازه علامتدار است توسعه داد (یعنی، $\mu \ll \nu$ اگر و فقط $|\mu| \ll \nu$)، اما به این تعریف بسیار کلی نیازی نخواهیم داشت. واژه « پیوستگی مطلق » از نظریه متغیر حقیقی برگرفته شده است؛ ۳.۵ را ببینید.
 برای اندازه‌های علامتدار متناهی، پیوستگی مطلق با شرط دیگری معادل است که به وضوح شکلی از پیوستگی می‌باشد.

۳.۵ قضیه. فرض کنید ν یک اندازه علامتدار متناهی و μ یک اندازه مثبت روی (X, \mathcal{M}) است. در این صورت $\mu \ll \nu$ اگر و فقط اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ عددی چون $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $\mu(E) < \delta$ ، آنگاه $|\nu(E)| < \epsilon$.

برهان. چون $\mu \ll \nu$ اگر و فقط اگر $\mu \ll \nu^+$ و $|\nu(E)| \leq \nu(E)$ کافی است فرض کنیم که $\nu = \nu^+ - \nu^-$ مثبت است. به وضوح شرط $\epsilon - \delta$ ایجاب می‌کند که $\nu \ll \mu$ از سوی دیگر، اگر شرط $\epsilon - \delta$ برقرار نباشد، عددی مانند $\epsilon > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، می‌توانیم عضوی مانند $E_n \in \mathcal{M}$ بیابیم که $\mu(E_n) < 2^{-n}$ و $\nu(E_n) \geq \epsilon$ فرض کنید $F_n = \bigcup_{k=1}^n E_k$ و $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. در این صورت $\mu(F) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$ ، لذا $\mu(F) < 1$ اما به ازای همه k ها، $\nu(F_k) \geq \epsilon$ و لذا به دلیل متناهی بوده ν ، $\nu(F) = \lim \nu(F_k) \geq \epsilon$ بنا بر این $\mu \ll \nu$ نادرست است. ■

چنانچه μ یک اندازه و f یک تابع μ -انتگرال پذیر توابع یافته باشد، تابع علامتدار ν که با $\nu(E) = \int_E f d\mu$ تعریف می‌شود به وضوح نسبت به μ پیوسته مطلق است؛ این اندازه متناهی است. اگر و فقط اگر $f \in L^1(\mu)$ به ازای هر تابع مختلط مانند $f \in L^1(\mu)$ می‌توان قضیه قبل را در مورد $\text{Re } f$ و $\text{Im } f$ به کار گرفته و نتیجه مفید زیر را به دست آورد:

۳.۶ نتیجه. اگر $f \in L^1(\mu)$ ، آنگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ عددی چون $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $\mu(E) < \delta$ آنگاه $|\int_E f d\mu| < \epsilon$ برای بیان رابطه $\nu(E) = \int_E f d\mu$ از رابطه زیر استفاده خواهیم کرد:

$$d\nu = fd\mu.$$

گاهی با کمی اغماض، از «اندازه علامت‌دار $fd\mu$ » سخن به میان خواهیم آورد. اکنون به قضیه اصلی این بخش می‌رسیم که تصویر کامل از ساختار یک اندازه علامت‌دار مرتبط با یک اندازه مثبت مفروض، به دست می‌دهد. نخست یک لم تکنیکی می‌آوریم:

۳.۷ لم. فرض کنید ν و μ دو اندازه متناهی روی (X, \mathcal{M}) باشند. $\nu \perp \mu$ یا $\epsilon > 0$ ای و $E \in \mathcal{M}$ وجود دارند به طوری که $\mu(E) > 0$ و $\nu \geq \epsilon\mu$ (یعنی، E یک مجموعه مثبت برای $\nu - \epsilon\mu$ است).

برهان. فرض کنیم $X = P_n \cup N_n$ یک تجزیه هان برای $\nu - n^{-1}\mu$ باشد و $P = \bigcup_1^\infty P_n$ و

$$N = \bigcap_1^\infty N_n = P^c.$$

در این صورت برای هر n ، N یک مجموعه منفی برای $\nu - n^{-1}\mu$ است، یعنی برای هر n ، $0 \leq \nu(N) \leq n^{-1}\mu(N)$. لذا $\nu(N) = 0$. اگر $\mu(P) = 0$ ، آنگاه $\nu \perp \mu$. اگر $\mu(P) > 0$ ، آنگاه به ازای n ای، $\mu(P_n) > 0$ و $\nu(P_n) > 0$ یک مجموعه مثبت برای $\nu - n^{-1}\mu$ است. ■

۳.۸ قضیه لبگ - رادون - نیکودیموم. فرض کنید ν یک اندازه علامت‌دار σ -متناهی و μ یک اندازه σ -متناهی روی (X, \mathcal{M}) باشد. دو اندازه علامت‌دار σ -متناهی یکتا مانند λ و ρ روی (X, \mathcal{M}) وجود دارند به طوری که

$$\nu = \lambda + \rho, \quad \rho \ll \mu, \quad \lambda \perp \mu.$$

به علاوه، یک تابع μ -انتگرال پذیر توسعه یافته مانند $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $d\rho = fd\mu$ و هر دو تابع از این قبیل μ -ت. ه. با هم برابرند.

برهان. حالت I : فرض کنید ν و μ دو اندازه مثبت متناهی باشند. قرار دهید:

$$\mathcal{F} = \left\{ f: X \rightarrow [0, \infty) : \int_E fd\mu \leq \nu(E), \forall E \in \mathcal{M} \right\}.$$

\mathcal{F} ناتهی است زیرا $0 \in \mathcal{F}$. همچنین، اگر $f, g \in \mathcal{F}$ ، آنگاه $h = \max(f, g) \in \mathcal{F}$ زیرا اگر

$$A = \{x : f(x) > g(x)\}$$

آنگاه به ازای هر $E \in \mathcal{M}$ داریم

$$\int_E hd\mu = \int_{E \cap A} fd\mu + \int_{E \setminus A} gd\mu \leq \nu(E \cap A) + \nu(E \setminus A) = \nu(E).$$

قرار دهید $a = \sup\{\int fd\mu : f \in \mathcal{F}\}$ و توجه کنید که $a \leq \nu(X) < \infty$ و دنباله‌ای چون $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ را چنان انتخاب کنید که $\int f_n d\mu \rightarrow a$. فرض کنید $g_n = \max(f_1, \dots, f_n)$ و $f = \sup_n f_n$. در این صورت $g_n \in \mathcal{F}$

g_n نقطه به نقطه و به طور صعودی به f می‌گراید و $\int g_n d\mu \geq \int f_n d\mu$. نتیجه می‌گیریم $\lim \int g_n d\mu = a$ و از این رو، طبق قضیه همگرایی یکنوا $f \in \mathcal{F}$ و $\int f d\mu = a$ (به ویژه $f < \infty$ است). پس می‌توان فرض کرد که f همه جا حقیقی - مقدار است). ادعا می‌کنیم اندازه $d\lambda = d\nu - f d\mu$ (که مثبت است زیرا $f \in \mathcal{F}$) نسبت به μ منظم است. اگر چنین نباشد، بنابر لم ۳.۷ عضو $E \in \mathcal{M}$ و $\varepsilon > 0$ ای موجودند به طوری که $\mu(E) > 0$ و $\lambda \geq \varepsilon \mu$ بر E . اما در این صورت $d\lambda = d\nu - f d\mu$ ، یعنی $\varepsilon \chi_E d\mu \leq d\lambda = d\nu - f d\mu$ ، پس $(f + \varepsilon \chi_E) d\mu \leq d\nu$ لذا $f + \varepsilon \chi_E \in \mathcal{F}$ و

$$\int (f + \varepsilon \chi_E) d\mu = a + \varepsilon \mu(E) > a$$

و این با تعریف a در تناقض است.

بنابر این، وجود λ ، f و $d\rho = f d\mu$ اثبات شده است. در مورد یکتایی گوئیم، چنانچه $d\nu = d\lambda' + f' d\mu$ داریم

$$d\lambda - d\lambda' = (f' - f) d\mu$$

اما $\lambda - \lambda' \perp \mu$ (تمرین ۹) در حالی که

$$(f' - f) d\mu \ll \mu.$$

بنابر این $d\lambda - d\lambda' = (f' - f) d\mu = 0$ پس $\lambda = \lambda'$ و (بنابر گزاره ۳.۲۳) $f = f'$ (۳.۲۳). از این رو در حالتی که μ و ν اندازه‌هایی متناهی هستند به حکم رسیده‌ایم.

حالت II: فرض کنید μ و ν دو اندازه σ -متناهی هستند. در این صورت اجتماع شمارش‌پذیر مجزایی از مجموعه‌های μ -متناهی و اجتماع شمارش‌پذیر مجزایی از مجموعه‌های ν -متناهی است؛ با اشتراک گرفتن از این‌ها دنباله‌ای مجزا مانند $\{A_j\} \subset \mathcal{M}$ به دست می‌آوریم به قسمی که به ازای همه j ها $\mu(A_j)$ و $\nu(A_j)$ متناهی‌اند و $X = \bigcup_1^\infty A_j$ تعریف

کنید: $\mu_j(E) = \mu(E \cap A_j)$ و $\nu_j(E) = \nu(E \cap A_j)$. با استدلال فوق به ازای هر j داریم:

$$d\nu_j = d\lambda_j + f_j d\mu_j$$

که در آن $\lambda_j \perp \mu_j$ چون $\mu_j(A_j^c) = \nu_j(A_j^c) = 0$ داریم

$$\lambda_j(A_j^c) = \nu_j(A_j^c) - \int_{A_j^c} f_j d\mu_j = 0$$

پس می‌توان فرض کرد که $f_j = 0$ بر A_j^c . فرض کنید $\lambda = \sum_1^\infty \lambda_j$ و $f = \sum_1^\infty f_j$. در این صورت $d\nu = d\lambda + f d\mu$ (تمرین ۹) و $d\lambda$ و $f d\mu$ هر دو σ -متناهی هستند که همان مطلوب است. یکتا مانند قبل نتیجه می‌شود.

حالت کلی: اگر ν یک اندازه علامت‌دار باشد، استدلال قبل را در مورد ν^+ و ν^- به کار برده و حاصل‌ها را تفریق می‌کنیم. ■

تجزیه $\nu = \lambda + \rho$ که در آن $\lambda \perp \mu$ و $\rho \ll \mu$ ، تجزیه لبگ ν نسبت به μ نامیده می‌شود. در حالتی که $\mu \ll \nu$ ، قضیه ۳.۸ می‌گوید که به ازای f ای $d\nu = f d\mu$

اغلب این نتیجه به قضیه رادون - نیکودیموم معروف است، و f مشتق رادون - نیکودیموم ν نسبت به μ نامیده می‌شود.

این مشتق را با $\frac{d\nu}{d\mu}$ نشان می‌دهیم:

$$d\nu = \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

فرمول‌های پیش‌بینی شده برای نماد مشتق $\frac{d\nu}{d\mu}$ عموماً درست هستند. برای مثال، واضح است که

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \left(\frac{d\nu_1}{d\mu}\right) + \left(\frac{d\nu_2}{d\mu}\right)$$

و قاعده زنجیری را داریم:

۳.۹ گزاره. فرض کنید که ν یک اندازه علامت‌دار σ -متناهی و μ و λ دو اندازه σ -متناهی روی (X, \mathcal{M}) به‌طوری‌که $\nu \ll \mu$ و $\lambda \ll \mu$.

الف) اگر $g \in L^1(\nu)$ ، آنگاه $g \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) \in L^1(\lambda)$ و $\int g d\nu = \int g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$

ب) داریم $\mu \ll \nu$ و

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \frac{d\mu}{d\lambda} \quad (\lambda\text{-ت.ه.})$$

برهان. با جداگانه در نظر گرفتن ν^+ و ν^- ، می‌توانیم فرض کنیم که $\nu \geq 0$. بنابر تعریف $\frac{d\nu}{d\mu}$ ، هنگامی که $g = \chi_E$ ، تساوی

$$\int g d\nu = \int g \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu$$

نتیجه، بنابر قضیه همگرایی یکنوا برای توابع اندازه‌پذیر درست است و بالاخره باز هم بنابر تعریف $\frac{d\nu}{d\mu}$ ، برای توابع واقع در $L^1(\nu)$ نیز درست است.

با جایگزینی μ و λ به جای ν و μ و با قرار دادن $g = \chi_E \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)$ برای هر $E \in \mathcal{M}$ به دست می‌آوریم:

$$\nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = \int_E \frac{d\nu}{d\mu} \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda$$

که در آن بنابر گزاره ۲.۲۳، λ -ت.ه. داریم

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \frac{d\mu}{d\lambda} \quad \blacksquare$$

۳.۱۰ نتیجه. اگر $\mu \ll \lambda$ و $\lambda \ll \mu$ ، آنگاه μ (نسبت به λ یا μ)

$$\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)\left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right) = 1.$$

مثال نقض: فرض کنید μ اندازه لیگ و ν جرم نقطه‌ای در O روی $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ باشد. به وضوح $\mu \perp \nu$. معمولاً عدم وجود

مشتق رادون-نیکودیم $\frac{d\nu}{d\mu}$ تحت عنوان σ -تابع دیراک مشهور است.

این بخش را ملاحظه‌ای ساده اما مهم به پایان می‌رسانیم:

۳.۱۱ قضیه. اگر μ_1, \dots, μ_n چند اندازه روی (X, \mathcal{M}) باشند، اندازه‌ای چون μ موجود است به قسمی که به ازای هر μ_j ،

$$\mu \ll \mu_j \quad (\text{در واقع } \mu = \sum_{j=1}^n \mu_j).$$

برهان بدیهی است.

تمرین‌ها

۸) $\mu \ll \nu$ اگر و فقط اگر $\mu \ll \nu^+$ و $\mu^- \ll \nu^-$

۹) فرض کنید $\{\nu_j\}$ دنباله‌ای از اندازه‌های مثبت باشد. اگر به ازای همه ν_j ها $\mu \perp \nu_j$ ، آنگاه $\mu \perp \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j$ و اگر به

ازای هر j داشته باشیم $\mu \ll \nu_j$ ، آنگاه $\mu \ll \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j$.

۱۰) وقتی ν متناهی نیست ممکن است قضیه ۳.۵ غلط باشد. $d\nu(x) = \frac{dx}{x}$ و $d\mu(x) = dx$ روی $(0, 1)$ را در نظر

بگیرید یا: اندازه شمارشی $\nu = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n}$ روی \mathbb{N} را در نظر بگیرید.

۱۱) فرض کنید μ یک اندازه مثبت است. گردایه‌ای چون $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in L^1(\mu)$ انتگرال پذیر یکنواخت نامیم در صورتی که

به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $\mu(E) < \delta$ به ازای هر $\alpha \in A$ داشته باشیم

$$\left| \int_E f_n d\mu \right| < \varepsilon$$

الف) هر زیرمجموعه متناهی از $L^1(\mu)$ انتگرال پذیر یکنواخت است.

ب) اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $L^1(\mu)$ باشد که بامتر L^1 به $f \in L^1(\mu)$ همگرا باشد، آنگاه $\{f_n\}$ انتگرال پذیر یکنواخت است.

(۱۲) به ازای $z = 1, 2$ فرض کنید ν_z, μ_z دو اندازه متناهی روی (X_z, \mathcal{M}_z) باشند به قسمی که $\nu_z \ll \mu_z$ در این صورت $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ و

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1) \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2).$$

(۱۳) فرض کنیم $X = [0, 1], \mathcal{M} = \mathcal{B}_{[0, 1]}$ ، m اندازه لبگ و μ اندازه شمارشی روی \mathcal{M} باشد.
الف) $m \ll \mu$ اما به ازای هر f ، $dm \neq fd\mu$.
ب) μ دارای تجزیه لبگ نسبت به m نیست.

(۱۴) اگر ν اندازه علامت‌دار دل‌خواهی باشد و μ یک اندازه σ -متناهی روی (X, \mathcal{M}) به قسمی که $\nu \ll \mu$ ، آنگاه تابع μ -انتگرال‌پذیر توسیع یافته‌ای مانند $[-\infty, \infty] \rightarrow X: f$ وجود دارد به طوری که $fd\mu = d\nu$. راهنمایی‌ها:
الف) کافی است فرض شود که μ متناهی و ν مثبت است.

ب) با این مفروضات، عضوی مانند E از \mathcal{M} وجود دارد که نسبت به ν ، σ -متناهی است به طوری که برای همه مجموعه‌های F که نسبت به ν ، σ -متناهی هستند، $\mu(E) \geq \mu(F)$.
ج) قضیه رادون نیکودیموم را روی E به کار برید. اگر $E \cap F = \emptyset$ ، آنگاه یا $\nu(F) = \mu(F) = 0$ یا $\nu(F) > 0$ و $|\nu(F)| = \infty$.

(۱۵) اندازه ای چون μ روی (X, \mathcal{M}) تجزیه‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه خانواده‌ای مانند $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ با خواص زیر وجود داشته باشد:

(i) برای هر $F \in \mathcal{F}$ ، $\mu(F) < \infty$ ؛ (ii) اعضای \mathcal{F} مجزا هستند و اجتماعشان X است. (iii) اگر $\mu(E) < \infty$ ، آنگاه $\mu(E) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu(E \cap F)$ ؛ (iv) اگر $E \subset X$ و برای هر $F \in \mathcal{F}$ ، $E \cap F \in \mathcal{M}$ ، آنگاه $E \in \mathcal{M}$.
الف) هر اندازه σ -متناهی، تجزیه‌پذیر است.

ب) چنانچه μ تجزیه‌پذیر و ν اندازه علامت‌دار دل‌خواهی روی (X, \mathcal{M}) باشد به طوری که $\nu \ll \mu$ ، تابع اندازه‌پذیری چون $[-\infty, \infty] \rightarrow X: f$ وجود دارد به طوری که برای هر E که نسبت به μ ، σ -متناهی باشد، $\nu(E) = \int_E fd\mu$ و روی هر $F \in \mathcal{F}$ که نسبت به ν ، σ -متناهی باشد، $|f| < \infty$.
(در صورت σ -متناهی نبودن ν از تمرین ۱۴ استفاده کنید.)

۱۶) فرض کنید μ و ν اندازه‌هایی σ -متناهی روی (X, \mathcal{M}) باشند که $\mu \ll \nu$ ، سپس قرار دهید $\lambda = \mu + \nu$. اگر

$$f = \frac{d\nu}{d\lambda}, \text{ آنگاه } 0 \leq f < 1 \text{ و } \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{f}{1-f}$$

۱۷) فرض کنیم (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای σ -متناهی، \mathcal{N} یک زیر σ -جبر از \mathcal{M} باشد و $\nu|_{\mathcal{N}} = \mu$. فرض کنید ν نیز σ -متناهی است. (این فرض الزامی است؛ برای مثال μ را اندازه لبگ روی \mathbb{R} و \mathcal{N} را σ -جبر شمارش‌پذیر یا متمم شمارش‌پذیر از مجموعه‌ها بگیرید.) اگر $f \in L^1(\mu)$ ، آنگاه عضوی چون $g \in L^1(\nu)$ وجود دارد (لذا $g \in \mathcal{N}$ -اندازه‌پذیر است) به طوری که برای هر $E \in \mathcal{N}$ ، $\int_E f d\mu = \int_E g d\nu$. اگر $g' \in L^1(\nu)$ تابع دیگری از این سنخ باشد، آنگاه $g = g'$ ν -ت. ه. (در نظریه احتمال، g امید شرطی f روی \mathcal{M} نامیده می‌شود.)

۳.۳ اندازه‌های مختلط

یک اندازه مختلط روی فضای اندازه‌پذیری مانند (X, \mathcal{M}) نگاهی چون $\nu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ است به طوری که:

• $\nu(\emptyset) = 0$

• اگر $\{E_j\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزای واقع در \mathcal{M} باشد، آنگاه $\nu(\bigcup_1^\infty E_j) = \sum_1^\infty \nu(E_j)$ ، که در آن سری مذکور مطلقاً همگرا است.

بالاخص، مقادیر نامتناهی پذیرفتنی نیستند، لذا یک اندازه مثبت فقط وقتی یک اندازه مختلط است که متناهی باشد.

مثال: اگر μ اندازه مثبتی باشد و $f \in L^1(\mu)$ ، آنگاه $f d\mu$ یک اندازه مختلط است.

چنانچه ν یک اندازه مختلط باشد، ν_1, ν_2 به ترتیب به معانی بخش حقیقی و بخش موهومی ν هستند. بنابراین ν_1, ν_2 اندازه‌های علامت‌داری هستند که مقادیر $\pm\infty$ را نمی‌گیرند؛ از این رو این دو اندازه متناهی هستند و لذا برد ν زیر مجموعه بسته‌ای از \mathbb{C} است.

نمادهایی که برای اندازه‌های علامت‌دار به کار بردیم به آسانی به اندازه‌های مختلط تعمیم می‌یابند. برای مثال، $L^1(\nu)$ را $L^1(\nu_1) \cap L^1(\nu_2)$ تعریف می‌کنیم و برای $f \in L^1(\nu)$ قرار می‌دهیم: $\int f d\nu = \int f d\nu_1 + i \int f d\nu_2$. چنانچه ν و μ اندازه‌های مختلطی باشند، می‌گوییم $\mu \perp \nu$ هرگاه برای $a, b \in \mathbb{C}$ ، $\nu_a \perp \mu_b$ و اگر λ یک اندازه مثبت باشد، می‌گوییم $\lambda \ll \nu$ هرگاه $\lambda \ll \nu_1$ و $\lambda \ll \nu_2$. قضایای بند ۳.۲ نیز تعمیم می‌یابند؛ فقط این قضایا به‌طور جداگانه برای بخش‌های حقیقی و موهومی به کار می‌روند. بالاخص:

۳.۱۲ قضیه لبگ - رادون - نیکودیم. اگر ν یک اندازه مختلط و μ اندازه σ -متناهی مثبتی روی (X, \mathcal{M}) باشد، آنگاه اندازه مختلطی مانند λ و تابعی چون $f \in L^1(\mu)$ وجود دارد به طوری که $\lambda \perp \mu$ و $d\nu = d\lambda + fd\mu$. اگر افزون بر مفروضات فوق، $\mu \perp \lambda'$ و $d\nu = d\lambda' + f'd\mu$ ، آنگاه $\lambda = \lambda'$ و $f = f'$ ، μ -ت. ه.

مانند قبل، هرگاه $\mu \ll \nu$ ، تابع f ای که در قضیه ۳.۱۲ ذکر شد با نماد $\frac{d\nu}{d\mu}$ نشان داده می‌شود.

تغییر کل اندازه مختلطی چون ν ، اندازه مثبت $|\nu|$ است و با این خلوص مشخص می‌شود که اگر $d\nu = fd\mu$ که در آن μ یک اندازه مثبت است، آنگاه $d|\nu| = |f|d\mu$. برای اطمینان از خوشتعریفی $|\nu|$ ، اولاً ملاحظه می‌کنیم که هر ν به ازای اندازه ای چون μ و تابعی مانند $f \in L^1(\mu)$ به شکل $fd\mu$ است؛ در واقع، می‌توانیم μ را $|\nu_+| + |\nu_-|$ بگیریم و برای به دست آوردن f از قضیه ۳.۱۲ استفاده کنیم. ثانیاً، اگر $d\nu = f_1d\mu_1 = f_2d\mu_2$ ، فرض می‌کنیم $\mu = \mu_1 + \mu_2$. در این صورت بنابر قضیه ۳.۹،

$$f_1 \frac{d\mu_1}{d\rho} d\rho = d\nu = f_2 \frac{d\mu_2}{d\rho} d\rho,$$

لذا $f_1 \left(\frac{d\mu_1}{d\rho}\right) = f_2 \left(\frac{d\mu_2}{d\rho}\right)$ ، ρ -ت. ه. حال چون $\frac{d\mu_j}{d\rho}$ نامنفی است، داریم:

$$|f_1| \frac{d\mu_1}{d\rho} = \left| f_1 \frac{d\mu_1}{d\rho} \right| = \left| f_2 \frac{d\mu_2}{d\rho} \right| = |f_2| \frac{d\mu_2}{d\rho} \quad (\rho\text{-ت. ه.}),$$

و از این رو

$$|f_1| d\mu_1 = |f_1| \frac{d\mu_1}{d\rho} d\rho = |f_2| \frac{d\mu_2}{d\rho} d\rho = |f_2| d\mu_2.$$

بنابراین، تعریف $|\nu|$ مستقل از انتخاب μ و f است. این تعریف با تعریف پیشین $|\nu|$ که در آن ν یک اندازه علامت‌دار بود سازگاری دارد، زیرا در آن حالت $d|\nu| = (\chi_P - \chi_N)d\nu$ ، که در آن $X = P \cup N$ یک تجزیه هان است و $|\chi_P - \chi_N| = 1$.

۳.۱۳ گزاره. فرض کنیم ν اندازه مختلطی روی (X, \mathcal{M}) باشد.

(الف) برای هر $E \in \mathcal{M}$ ، $|\nu(E)| \leq |\nu|(E)$.

(ب) $\nu \ll |\nu|$ و $\frac{d\nu}{d|\nu|}$ دارای اندازه ۱ است.

(ج) $L^1(\nu) = L^1(|\nu|)$ و اگر $f \in L^1(\nu)$ ، آنگاه $\int f d\nu \leq \int |f| d|\nu|$.

برهان. مانند تعریف $|\nu|$ فرض می‌کنیم $d\nu = fd\mu$. در این صورت

$$|\nu(E)| = \left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu = |\nu_1(E)|.$$

این مطلب، (الف) را ثابت کرده و نشان می‌دهد که $\nu \ll |\nu_1|$ اگر $g = \frac{d\nu}{d|\nu_1|}$ ، آنگاه داریم

$$f d\mu = d\nu = g d|\nu_1| = g |f| d\mu.$$

لذا μ - ه. ت. $g|f| = f$ و در نتیجه $|\nu_1|$ - ه. ت. $g|f| = f$ اما به وضوح $|\nu_1|$ - ه. ت. $|f| > 0$ ، در حالی که $|\nu_1|$ - ه. ت. $|g| = 1$. اثبات (ج) به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۱۸). ■

۳.۱۴ گزاره. اگر ν_1 و ν_2 اندازه‌های مختلطی روی (X, \mathcal{M}) باشند، آنگاه $|\nu_1 + \nu_2| \leq |\nu_1| + |\nu_2|$.

برهان. بنابر گزاره ۳.۱۱ برای $j = 1, 2$ ، با μ_j یکسان داریم: $d\nu_j = f_j d\mu$. اما در این صورت $d|\nu_1 + \nu_2| = |f_1 + f_2| d\mu \leq |f_1| d\mu + |f_2| d\mu = d|\nu_1| + d|\nu_2|$. ■

تمرین‌ها.

(۱۸) قسمت (ج) از گزاره ۳.۱۳ را ثابت کنید.

(۱۹) اگر ν و μ دو اندازه مختلط و λ یک اندازه مثبت باشد، آنگاه $\mu \perp \nu$ اگر و تنها اگر $|\mu| \perp |\nu|$ و $\lambda \ll \nu$ اگر و تنها اگر $\lambda \ll |\nu|$.

(۲۰) اگر ν اندازه مختلطی روی (X, \mathcal{M}) باشد و $\nu(X) = -\nu_1(X)$ ، آنگاه $\nu = |\nu_1|$.

(۲۱) فرض کنید ν اندازه مختلطی روی (X, \mathcal{M}) باشد. اگر $E \in \mathcal{M}$ ، تعریف کنید:

$$\mu_1(E) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |\nu(E_j)| : n \in \mathbb{N}, E_1, \dots, E_n \text{ مجزا هستند}, E = \bigcup_{j=1}^n E_j \right\},$$

$$\mu_2(E) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)| : n \in \mathbb{N}, E_1, \dots, E_n \text{ مجزا هستند}, E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\},$$

$$\mu_3(E) = \sup \left\{ \left| \int_E f d\nu \right| : |f| \leq 1 \right\}.$$

در این صورت $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ (ابتدا نشان دهید که $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3$ برای دیدن اینکه $1 = \mu_3$ ، فرض کنید $f = \frac{dv}{d\mu}$ و گزاره ۳.۱۳ را به کار ببرید. برای دیدن اینکه $\mu_3 \leq \mu_1$ ، f را با توابع ساده تقریب بزنید.)

۳.۴ مشتق‌گیری روی فضای اقلیدسی

قضیه رادون - نیکودیم یک مفهوم ذهنی از «مشتق» یک اندازه مختلط یا علامت‌دار نسبت به اندازه ای چون μ ایجاد می‌کند. در این بخش به طور عمیق‌تر حالت خاصی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن $(X, \mathcal{M}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ و $\mu = m$ اندازه لبگ است. در اینجا می‌توان یک مشتق نقطه‌ای ν نسبت به m را به روش زیر تعریف کرد. فرض کنیم $B(r, x)$ گوی باز با شعاع r حول x در \mathbb{R}^n باشد؛ در این صورت می‌توان حد زیر را در صورت وجود در نظر گرفت:

$$F(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(r, x))}{m(B(r, x))}$$

می‌توان گوی‌های $B(r, x)$ را با مجموعه‌های دیگری نیز عوض کرد که، به مفهومی مناسب، به شیوه‌ای منظم به x نزدیک شوند این دیدگاه را بعداً مورد کنکاش قرار خواهیم داد. چنانچه $\nu \ll m$ و لذا $d\nu = f dm$ ، آنگاه به‌طور خلاصه

مقدار میانگین f روی $B(r, x)$ است، لذا باید انتظار داشت که m - ت. ه. $F = f$. این مطلب به شرطی

درست از آب در می‌آید که $\nu(B(r, x))$ برای هر x و r متناهی باشد. از نقطه نظر تابع f ، این موضوع را می‌توان به عنوان تعمیمی از قضیه اساسی حسابان قلمداد کرد: مشتق انتگرال نامعین f (یعنی، ν) است.

در ادامه این فصل، عباراتی از قبیل «انتگرال» و «تقریباً همه جا» به اندازه لبگ برمی‌گردیم مگر آنکه خلافش ذکر شود. بررسی‌های خود را با یک لم تکنیکی آغاز می‌کنیم که به خودی خود جالب توجه است.

۳.۱۵ لم. فرض کنیم \mathcal{C} گردابه‌ای از گوی‌های باز واقع در \mathbb{R}^n باشد و $U = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B$. هرگاه $c < m(U)$ ، گوی‌های

$$B_1, \dots, B_k \in \mathcal{C} \text{ وجود دارند به طوری که } \sum_{j=1}^k m(B_j) > c$$

برهان. چنانچه $c < m(U)$ ، بنا بر قضیه ۲.۴۰، مجموعه فشرده‌ای مانند $K \subset U$ با شرط $m(K) > c$ وجود دارد و

تعدادی متناهی از گوی‌های واقع در \mathcal{C} — مثل A_1, \dots, A_n — را می‌پوشانند. فرض کنیم B_1 بزرگترین A_j ‌ها باشد.

(یعنی، B_1 را با شعاع ماکسیمال انتخاب می‌کنیم)، فرض می‌کنیم B_2 بزرگترین A_j ‌هایی باشد که از B_1 جدا هستند، B_3 و

تا جایی ادامه می‌دهیم که A_j ‌ها تمام شوند. طبق این نحوه ساخت، اگر A_i یکی از B_j ‌ها نباشد، A_i وجود دارد

که $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ ، و اگر A_i کوچکترین عدد صحیح با این خاصیت باشد، شعاع A_i حد اکثر به بزرگی شعاع B_j است

بنابراین $A_i \subset B_j^*$ ، که در آن B_j^* گویى هم مرکز با B_j است که شعاعش سه برابر شعاع B_j است. اما در این صورت
 لذا $K \subset \bigcup_1^k B_j^*$

$$c \leq m(K) \leq \sum_1^k m(B_j^*) = 3^n \sum_1^k m(B_j). \blacksquare$$

تابع اندازه پذیری چون $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ انتگرال پذیر موضعی (نسبت به اندازه لیگ) نامیده می شود هرگاه برای هر مجموعه اندازه پذیر گراندار مانند $K \subset \mathbb{R}^n$ ، $\int_K |f(x)| dx < \infty$. فضای توابع انتگرال پذیر موضعی را با L^1_{loc} نشان می دهیم .
 اگر $f \in L^1_{loc}$ ، $x \in \mathbb{R}^n$ و $r > 0$ ، آنگاه $A_r f(x)$ را مقدار میانگین روی تعریف می کنیم :

$$A_r f(x) = \frac{1}{m(B(r,x))} \int_{B(r,x)} f(y) dy .$$

۳.۱۶ لم. اگر $f \in L^1_{loc}$ ، آنگاه $A_r f(x)$ نسبت به r و x مشترکاً پیوسته است ($x \in \mathbb{R}^n$ و $r > 0$) .

برهان. از حکمی در بند ۲.۷ می دانیم که $m(B(r,x)) = cr^n$ که در آن $c = m(B(1,0))$ و $m(S(r,x)) = 0$ که در آن $S(r,x) = \{y : |y-x| = r\}$. به علاوه ، وقتی $r \rightarrow r_0$ و $x \rightarrow x_0$ ، $\chi_{B(r,x)} \rightarrow \chi_{B(r_0,x_0)}$ به طور نقطه ای بر $\mathbb{R}^n \setminus S(r_0,x_0)$. بنابر این $\chi_{B(r,x)} \rightarrow \chi_{B(r_0,x_0)}$. و اگر $r < r_0 + \frac{1}{4}$ و $|x-x_0| < \frac{1}{4}$ ، آنگاه $|\chi_{B(r,x)}| \leq |\chi_{B(r_0+1,x_0)}|$. اینک از قضیه همگرایی مغلوب معلوم می شود که $\int_{B(r,x)} f(y) dy$ نسبت به r و x پیوسته بوده و در نتیجه $A_r f(x) = c^{-1} r^{-n} \int_{B(r,x)} f(y) dy$ نسبت به r و x پیوسته است . \blacksquare

حال، اگر $f \in L^1_{loc}$ ، تابع ماکسیمال هاردی - لیتوود Hf را با

$$Hf(x) = \sup_{r>0} A_r |f|(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(r,x))} \int_{B(r,x)} |f(y)| dy$$

تعریف می کنیم . Hf اندازه پذیر است ، زیرا بنابر لم ۳.۱۶ ، برای هر $a \in \mathbb{R}$ ، مجموعه

$$(Hf)^{-1}((a, \infty)) = \bigcup_{r>0} (A_r |f|)^{-1}((a, \infty))$$

باز است.

۳.۱۷ قضیه ماکسیمال. ثابتی مانند $C > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $f \in L^1$ و هر $\alpha > 0$ ،

$$m(\{x : Hf(x) > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha} \int |f(x)| dx .$$

برهان. فرض می‌کنیم $E_\alpha = \{x : Hf(x) > \alpha\}$. برای هر $x \in E_\alpha$ ، $r_x > 0$ را می‌توان چنان انتخاب کرد که $A_{r_x} |f|(x) > \alpha$. گوی‌های $B(r_x, x)$ مجموعه E_α را می‌پوشاند، لذا بنا بر لم ۲.۱۵ اگر $C < m(E_\alpha)$ ، اعضای چون $x_1, \dots, x_k \in E_\alpha$ وجود دارند به طوری که گوی‌های $B_j = B(r_{x_j}, x_j)$ مجزا هستند و

$$\sum_1^k m(B_j) > \alpha^{-n} C.$$

اما در این صورت

$$c < \alpha^{-n} \sum_1^k m(B_j) \leq \frac{\alpha^{-n}}{\alpha} \sum_1^k \int_{B_j} |f(y)| dy \leq \frac{\alpha^{-n}}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy.$$

با فرض $c \rightarrow m(E_\alpha)$ ، حکم مطلوب را به دست می‌آوریم. ■

اینک با در دست داشتن این ابزار، سه گونه برنده‌تر قضیهٔ انبساطی مشتق‌گیری را پشت سر هم می‌آوریم. در برهان‌ها از مفهوم حد اعلی برای توابع حقیقی یک متغیری، یعنی از

$$\limsup_{r \rightarrow R} \phi(r) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{0 < |r-R| < \varepsilon} \phi(r) = \inf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{0 < |r-R| < \varepsilon} \phi(r) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{0 < |r-R| < \varepsilon} \phi(r),$$

و حکم زیر استفاده می‌کنیم که درستی آن به آسانی بررسی می‌شود.

$$\lim_{r \rightarrow R} \phi(r) \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow R} \sup |\phi(r) - c| = 0.$$

۳.۱۸ قضیه. اگر $f \in L^1_{loc}$ ، آنگاه تقریباً برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ ، $\lim_{r \rightarrow 0} A_r f(x) = f(x)$.

برهان. کافی است نشان داده شود که برای $N \in \mathbb{N}$ ، تقریباً برای هر x ای که $|x| \leq N$ ، $A_r f(x) \rightarrow f(x)$. اما برای $|x| \leq N$ و $r \leq 1$ مقادیر $A_r f(x)$ فقط به مقادیر $f(y)$ برای $|y| \leq N+1$ بستگی دارند، لذا با جایگزینی $f \chi_{B(N+1,0)}$ به جای f ، می‌توان فرض کرد که $f \in L^1$. بنا بر قضیهٔ ۲.۴۱ با مفروض گرفتن $\varepsilon > 0$ می‌توان تابع انتگرال‌پذیر پیوسته‌ای مانند g بیابیم به طوری که $\int |g(y) - f(y)| dy < \varepsilon$. پیوستگی g ایجاب می‌کند که برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و هر $\delta > 0$ ، r ای وجود داشته باشد به طوری که وقتی $|y-x| < r$ ، $|g(y) - g(x)| < \delta$ و از این رو

$$|A_r g(x) - g(x)| = \frac{1}{m(B(r,x))} \left| \int_{B(r,x)} [g(y) - g(x)] dy \right| < \delta.$$

بنابر این وقتی $r \rightarrow 0$ ، $A_r g(x) \rightarrow g(x)$ برای هر x برقرار است، لذا

$$\begin{aligned} & \limsup_{r \rightarrow 0} |A_r f(x) - f(x)| \\ &= \limsup_{r \rightarrow 0} |A_r(f-g)(x) + (A_r g - g)(x) + (g-f)(x)| \\ &\leq H(f-g)(x) + 0 + |f-g|(x). \end{aligned}$$

به همین دلیل، اگر

$$E_\alpha = \{x : \limsup_{r \rightarrow 0} |A_r f(x) - f(x)| > \alpha\}, \quad F_\alpha = \{x : |f - g|(x) > \alpha\},$$

داریم

$$E_\alpha \subset F_{\frac{\alpha}{\gamma}} \cup \{x : H(f - g)(x) > \frac{\alpha}{\gamma}\}.$$

اما $\int_{F_{\frac{\alpha}{\gamma}}} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$ ، لذا بنا بر قضیه ماکسیمال،

$$m(E_\alpha) \leq \frac{\gamma \varepsilon}{\alpha} + \frac{\gamma C \varepsilon}{\alpha}$$

چون ε دل خواه است، برای هر $\alpha > 0$ ، $m(E_\alpha) = 0$ ، اما برای هر $x \in \bigcup_{\frac{1}{n}}^\infty E_{\frac{1}{n}}$ داریم:

$$\lim_{r \rightarrow 0} A_r f(x) = f(x).$$

لذا به آنچه می خواستیم رسیده ایم. ■

این حکم را جور دیگری هم می شود به صورت زیر بیان کرد: اگر $f \in L^1_{loc}$ ، آنگاه تقریباً برای هر x ،

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B(r, x))} \int_{B(r, x)} |f(y) - f(x)| dy = 0. \quad (3.19)$$

در واقع، حکم قویتری برقرار است: اگر در (3.19) انتگرال با قدر مطلقش جایگزین شود باز هم (3.19) درست باقی می ماند.

یعنی، مجموعه لبگی L_f از f را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L_f = \left\{ x : \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B(r, x))} \int_{B(r, x)} [f(y) - f(x)] dy = 0 \right\}.$$

۳.۲۴. قضیه. اگر $f \in L^1_{loc}$ ، آنگاه $m((L_f)^c) = 0$.

پرهان. برای هر $c \in \mathbb{C}$ می توان قضیه ۳.۱۸ را در مورد $g_c(x) = |f(x) - c|$ به کار برده و نتیجه گرفت که به جز

روی مجموعه بوج لبگی چون E ، داریم:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B(r, x))} \int_{B(r, x)} |f(y) - c| dy = |f(x) - c|.$$

فرض کنیم D مجموعه چگال شمارش پذیری از \mathbb{C} باشد و $E = \bigcup_{c \in D} E_c$ در این صورت $m(E) = 0$ ، و اگر $x \notin E$ ،

برای هر $\varepsilon > 0$ می توانیم $c \in D$ را با شرط $|f(x) - c| < \varepsilon$ انتخاب کنیم، لذا

$$|f(y) - f(x)| < |f(y) - c| + \varepsilon$$

و از اینجا معلوم می شود که

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(B(r, x))} \int_{B(r, x)} |f(y) - f(x)| dy \leq |f(x) - c| + \varepsilon < \gamma \varepsilon.$$

چون ε دل‌خواه است، به آنچه می‌خواستیم رسیده‌ایم. ■

بالاخره، خانواده‌هایی از مجموعه‌ها را در نظر می‌گیریم که کلی‌تر از گوی‌ها هستند. گفته می‌شود که خانواده‌ای چون $\{E_r\}_{r>0}$ از زیرمجموعه‌های برل \mathbb{R}^n با ظرافت به x چسبیده‌اند هرگاه:

- برای هر $r, E_r \subset B(r, x)$;
- ثابتی مانند $\alpha > 0$ مستقل از r وجود داشته باشد به طوری که $m(E_r) > \alpha m(B(r, x))$. مجموعه‌های E_r شامل خود x نیستند. برای مثال، اگر U زیرمجموعه‌ی برل‌سی از $B(1, 0)$ باشد به طوری که $m(U) > 0$ و $E_r = \{x + ry : y \in U\}$ ، نگاه $\{E_r\}$ با ظرافت به x چسبیده است. این هم نوع آخر قضیه مشتق‌گیری:

۳.۲۱ قضیه مشتق‌گیری لبگ. فرض کنیم $f \in L^1_{loc}$. برای هر x در مجموعه لبگ f - بالاخص، برای تقریباً هر x تساوی‌های زیر برای هر خانواده مانند $\{E_r\}_{r>0}$ که با ظرافت به x چسبیده باشد، برقرارند:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} |f(y) - f(x)| dy = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} f(y) dy = f(x).$$

برهان. برای $\alpha > 0$ ای داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(E_r)} \int_{E_r} |f(y) - f(x)| dy &\leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{m(E_r)} \int_{B(r, x)} |f(y) - f(x)| dy \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha m(B(r, x))} \int_{B(r, x)} |f(y) - f(x)| dy. \end{aligned}$$

بنابر این تساوی نخست از قضیه ۳.۲۰ نتیجه می‌شود و بلافاصله دیده می‌شود که با نوشتن دومی به شکل (۳.۱۹)، دومی از اولی به دست می‌آید. ■

اینک به مطالعه‌ی اندازه‌ها بر می‌گردیم. اندازه‌ی برلی چون ν روی \mathbb{R}^n منظم نامیده می‌شود هرگاه

$$(i) \quad \text{برای هر مجموعه فشردم مانند } K, \nu(K) < \infty;$$

$$(ii) \quad \text{برای هر } E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, E \subset U, U \text{ باز است: } \nu(E) = \inf\{\nu(U)\}.$$

(عملاً شرط دوم توسط شرط اول بر آورده می‌شود. این مطلب برای $n = 1$ از قضایای ۱.۱۶ و ۱.۱۸ نتیجه می‌شود و برای n ‌های دل‌خواه، آن را در بند ۷.۲ ثابت خواهیم کرد. فعلاً شرط دوم را به‌طور صریح فرض می‌کنیم.) بنابر شرط اول، ملاحظه می‌کنیم که هر اندازه منظم، σ -متناهی است. اندازه برل علامت‌دار یا مختلطی چون ν منظم نامیده خواهد شد هرگاه $|\nu|$ منظم باشد.

برای مثال، اگر $f \in L^+(\mathbb{R}^n)$ ، آنگاه اندازه f منظم است اگر و تنها اگر $f \in L^1_{loc}$ در واقع، واضح است که شرط $f \in L^1_{loc}$ یا شرط اول هم‌ارز است. چنانچه این مطلب برقرار باشد، شرط دوم به‌طور مستقیم محقق می‌شود. فرض می‌کنیم E یک مجموعه برل کراندار باشد. برای عدد مفروض $\varepsilon > 0$ ، بنابر قضیه ۳.۴۰، مجموعه باز کراندار $U \supset E$ وجود دارد به طوری که $m(U) < m(E) + \delta$ و در نتیجه $m(U \setminus E) < \delta$ اما در این صورت با فرض $\varepsilon > 0$ از نتیجه ۳.۶ معلوم می‌شود که مجموعه بازی چون $U \supset E$ وجود به طوری که $\int_{U \setminus E} f dm < \varepsilon$ و در نتیجه

$$\int_U f dm < \int_E f dm + \varepsilon.$$

در صورت غیر کراندار بودن E ، جزایر می‌دهیم $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ که در آن E_j کراندار است. با یافتن مجموعه بازی چون $U_j \supset E_j$ به طوری که $\int_{U_j \setminus E_j} f dm < \varepsilon \cdot 2^{-j}$ حکم به آسانی حاصل می‌شود. ■

۳.۲۲ قضیه. فرض کنیم ν اندازه برل مختلط یا علامت دار منظمی روی \mathbb{R}^n باشد و $d\nu = d\lambda + f dm$ نمایش لبگ-رادون - نیکودیم آن باشد. در این صورت نسبت به اندازه m تقریباً برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ ، تساوی $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(E_r)}{m(E_r)} = f(x)$ برای هر خانواده مانند $\{E_r\}_{r>0}$ که به‌طور ظریف به x چسبیده باشد برقرار است.

برهان. به آسانی مشخص می‌شود که $d|\nu| = d|\lambda| + |f| dm$ ، لذا منظم بودن ν منظم بودن λ و $f dm$ را ایجاب می‌کند (تمرین ۲۶). بالاخص $f \in L^1_{loc}$ ، لذا در پرتو قضیه ۳.۲۱ کافی است نشان داده شود که اگر f منظم باشد و $\lambda \perp m$ ، آنگاه نسبت به اندازه m تقریباً برای هر x ، وقتی $r \rightarrow 0$ و E_r با ظرافت به x چسبیده باشد، $\frac{\lambda(E_r)}{m(E_r)} \rightarrow 0$. همچنین کافی است $E_r = B(r, x)$ گرفته شده و فرض شود که λ مثبت است، زیرا برای $\alpha > 0$ ای داریم:

$$\left| \frac{\lambda(E_r)}{m(E_r)} \right| \leq \frac{|\lambda|(E_r)}{m(E_r)} \leq \frac{|\lambda|(B(r, x))}{m(E_r)} \leq \frac{|\lambda|(B(r, x))}{\alpha m(B(r, x))}$$

حال، با فرض $\lambda \perp m$ ، $\lambda(A) = m(A^c) = 0$ را می‌انگاریم که $\lambda(A) = m(A^c) = 0$ و فرض می‌کنیم:

$$F_k = \left\{ x \in A : \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda(B(r, x))}{m(B(r, x))} > \frac{1}{k} \right\}$$

نشان خواهیم داد که برای هر k ، $m(F_k) = 0$ و این مطلب برهان را کامل خواهد کرد.

استدلال شبیه به برهان قضیهٔ ماکسیمال است. بنابر منظم بودن λ ، اگر $\varepsilon > 0$ مفروض باشد، آنگاه مجموعه بازی مانند $U_\varepsilon \supset A$ وجود دارد به طوری که $\lambda(U_\varepsilon) < \varepsilon$. هر $x \in F_k$ مرکز گویی مانند $B_x \subset U_\varepsilon$ است به طوری که

$\lambda(B_x) > k^{-1}m(B_x)$. بنا بر لم ۳.۱۵، اگر $V_\varepsilon = \bigcup_{x \in F_k} B_x$ و $c < m(V_\varepsilon)$ ، آنگاه نقاطی چون x_1, \dots, x_J چنان وجود دارند که B_{x_1}, \dots, B_{x_J} مجزا هستند و

$$c < 3^n \sum_{j=1}^J m(B_{x_j}) \leq 3^n k \sum_{j=1}^J \lambda(B_{x_j}) \leq 3^n k \lambda(V_\varepsilon) \leq 3^n k \lambda(U_\varepsilon) \leq 3^n k \varepsilon.$$

نتیجه می‌گیریم که $m(V_\varepsilon) \leq 3^n k \varepsilon$ و چون $F_k \subset V_\varepsilon$ و ε دل‌خواه است، $m(F_k) = 0$.

تمرین‌ها

(۲۲) اگر $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ، $f \neq 0$ ، آنگاه اعدادی چون $C, R > 0$ وجود دارند به طوری که برای $|x| > R$ ، $Hf(x) \geq C|x|^{-n}$. بنا بر این وقتی α کوچک باشد، $m(\{x : Hf(x) > \alpha\}) \geq \frac{C}{\alpha}$ ، لذا برآورد واقع در قضیهٔ ماکسیمال ذاتاً تند و تیز است.

(۲۳) گونهٔ سودمندی از تابع ماکسیمال هاردی - لیتوود عبارت است از:

$$H^* f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy \quad x \in B, \text{ یک گوی است.}$$

نشان دهید که $Hf \leq H^* f \leq 2^n Hf$.

(۲۴) اگر L_{loc}^1 و f در x پیوسته باشند، آنگاه x در مجموعهٔ لیگ f است.

(۲۵) چنانچه E مجموعهٔ برلی در \mathbb{R}^n باشد، چگالی $D_E(x)$ از E در x به صورت

$$D_E(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(E \cap B(r, x))}{m(B(r, x))}$$

الف) نشان دهید تقریباً برای هر $x \in E$ ، $D_E(x) = 1$ و تقریباً برای هر $x \in E^c$ ، $D_E(x) = 0$.

ب) مثال‌هایی از E و x بیابید به طوری که $D_E(x)$ عدد مفروضی چون $\alpha \in (0, 1)$ باشد، یا $D_E(x)$ وجود نداشته

باشد.

(۲۶) اگر λ و μ اندازه‌های برل دو به دو منفرد مثبتی روی \mathbb{R}^n باشند و $\lambda + \mu$ منظم باشد، آنگاه λ و μ نیز منظم

هستند.

۳.۵ توابع با تغییر کراندار

قضایای بخش قبل مخصوصاً روی خط حقیقی به یکار می‌روند، در این حالت به دلیل تناظر بین اندازه‌های بزل منظم و توابع صعودی که اثباتش را در بند ۱.۵ آوردیم، این قضایا، احکامی در مورد مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری توابع به دست می‌دهند. همانند بند ۱.۵، این نماد را می‌پذیریم که اگر F تابع پیوسته راستی روی \mathbb{R} باشد، μ_F اندازه برلی است که با رابطه $\mu_F((a, b)) = F(b) - F(a)$ مشخص می‌شود. همچنین، در سراسر این بخش، عبارت «تقریباً همه جا» همیشه به اندازه لبگ بر می‌گردد. در اولین حکم این بخش، از قضیه مشتق‌گیری لبگ استفاده کرده و ثابت می‌کنیم که توابع صعودی تقریباً همه جا مشتق پذیرند.

۳.۲۳ قضیه. فرض کنیم $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ صعودی باشد و $G(x) = F(x+)$ در این صورت: الف) مجموعه نقاطی که F در آنها ناپیوسته است شمارش پذیر است. ب) F و G تقریباً همه جا مشتق پذیرند و $F' = G'$ ت. ه.

برهان. چون F صعودی است بازه‌های $(F(x-), F(x+))$ ($x \in \mathbb{R}$) مجزا هستند و برای $N \in \mathbb{N}$ در بازه $(F(-N), F(N))$ قرار دارند. بنابر این

$$\sum_{|x| < N} [F(x+) - F(x-)] \leq F(N) - F(-N) < \infty$$

و این ایجاب می‌کند که $\{x \in (-N, N) : F(x+) \neq F(x-)\}$ شمارش پذیر باشد. چون این مطلب برای هر N درست است، الف) اثبات می‌شود. حال، ملاحظه می‌کنیم که G صعودی و پیوسته راست است، و $G = F$ همه جا به جز شاید در نقاط ناپیوستگی، برقرار است. به علاوه،

$$G(x+h) - G(x) = \begin{cases} \mu_G((x, x+h)), & h > 0, \\ -\mu_G((x-h, x)), & h < 0, \end{cases}$$

و وقتی $h \rightarrow 0$ خانواده‌های $\{(x-h, x)\}$ و $\{(x, x+h)\}$ با ظرافت به x می‌چسبند. به همین جهت، اعمال قضیه ۳.۲۲ در مورد اندازه μ_G (که بنابر قضیه ۱.۱۸ منظم است) معلوم می‌کند که تقریباً برای همه x ها، $G'(x)$ وجود دارد. برای تکمیل برهان، باید نشان دهیم که اگر $H = G - F$ ، آنگاه H' تقریباً همه جا وجود داشته و برابر با صفر است. فرض می‌کنیم $\{x_j\}$ شمارشی از نقاطی باشد که در آنها $H \neq 0$. در این صورت $H(x_j) > 0$ ، و همانند فوق برای هر N داریم $\sum_{\{|x_j| < N\}} H(x_j) < \infty$. فرض می‌کنیم δ_j نقطه جرم در x_j باشد و $\mu = \sum_j H(x_j)\delta_j$. در این صورت بنابر حکم قبلی، μ متناهی است و از این رو بنابر قضایای ۱.۱۶ و ۱.۱۸، μ منظم است؛ همچنین $m \perp \mu$ زیرا وقتی

$$m(E) = \mu(E^c) = 0, E = \{x_j\}_1^\infty$$

$$\left| \frac{H(x+h) - H(x)}{h} \right| \leq \frac{H(x+h) + H(x)}{|h|} \leq \frac{\mu((x-2|h|, x+2|h|))}{4|h|}$$

که بنابر قضیه ۳.۲۲ عبارت اخیر وقتی $h \rightarrow 0$ تقریباً برای هر x به صفر میل می‌کند. بنابر این $H' = 0$ است. و به آنچه می‌خواستیم می‌رسیم. ■

همان‌طور که اندازه‌های مثبت روی \mathbb{R} به توابع صعودی مربوط می‌شدند، اندازه‌های مختلط روی \mathbb{R} به توابعی مربوط می‌شوند که توابع با تغییر گرانداری نامیده می‌شوند. تعریف مقوله اخیر کمی فنی است، لذا مقتضی ایجاد زمینه‌ای است. از نظر شهودی، اگر $F(t)$ نماینده مکان ذره‌ای باشد که در امتداد خط حقیقی در لحظه t حرکت می‌کند، آنگاه «تغییر کل» F روی بازه $[a, b]$ فاصله کل طی شده از لحظه a تا لحظه b همانند چیزی که روی یک کیلومتر شمار دیده می‌شود می‌باشد. اگر F دارای مشتق پیوسته‌ای باشد، این عدد دقیقاً انتگرال «سرعت» یعنی $\int_a^b |F'(t)| dt$ است. تعریف تغییر کل بدون هیچ فرض هموار بودن روی F به نگرش متفاوتی نیاز دارد؛ یعنی، $[a, b]$ به زیربازه‌هایی چون $[t_{j-1}, t_j]$ افراز شده و F روی این زیربازه‌ها توسط توابعی خطی تقریب زده می‌شود که نمودارشان $(t_{j-1}, F(t_{j-1}))$ را به $(t_j, F(t_j))$ وصل می‌کنند و سپس حد اعمال می‌شود.

در دقیق سازی این مطلب، با دیدگاه نسبتاً متفاوتی شروع می‌کنیم، قرار می‌دهیم $a = -\infty$ و تغییر کل را به عنوان تابعی از b قلمداد می‌کنیم. یعنی، اگر $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ و $x \in \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم:

$$T_F(x) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| : n \in \mathbb{N}, -\infty < x_0 < \dots < x_n = x \right\}.$$

T_F تابع تغییر کل نامیده می‌شود. ملاحظه می‌کنیم که اگر نقاط زیر تقسیم زیادی از x_j ‌ها اضافه شوند T_F بزرگتر می‌شود. بنابراین، هرگاه $a < b$ ، فرض اینکه a همواره یکی از نقاط زیر تقسیم است تاثیری بر تعریف $T_F(b)$ نمی‌گذارد از اینجا معلوم می‌شود که

$$T_F(b) - T_F(a) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| : n \in \mathbb{N}, a = x_0 < \dots < x_n = b \right\} \quad (3.24)$$

بنابر این T_F تابعی صعودی با مقادیر واقع در $[0, \infty]$ است. اگر $T_F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} T_F(x) = T_F(\infty)$ متناهی باشد، می‌گوییم روی \mathbb{R} با تغییر گرانداری است، و فضای همه چنین توابع F را با BV نشان می‌دهیم.

به طور کلی‌تر، سوپریم طرف راست (۳.۲۴) تغییر کل تابع F روی $[a, b]$ نامیده می‌شود. این سوپریم فقط به مقادیر F روی $[a, b]$ بستگی دارد، لذا می‌توان $BV([a, b])$ را مجموعه همه توابعی روی $[a, b]$ تعریف کرد که تغییر کل آنها روی $[a, b]$ متناهی است. چنانچه $F \in BV$ ، برای هر a و b تحدید F به $[a, b]$ در $BV([a, b])$ واقع است؛ در واقع، تغییر کل آن چیزی جز $T_F(b) - T_F(a)$ نیست. به عکس اگر $F \in BV([a, b])$ و برای $x < a$ قرار دهیم

خواهیم کرد را می توان برای $BV([a, b])$ نیز به کار برد. $F(x) = F(a)$ و برای $x > b$ ، $F(x) = F(b)$ ، آنگاه $F \in BV$. با این ترفند احکامی که برای BV اثبات

۳.۲۵ مثال ها

- (الف) اگر $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ کراندار و صعودی باشد، آنگاه $F \in BV$ (در واقع، $T_F(x) = F(x) - F(-\infty)$).
- (ب) اگر $F, G \in BV$ و $a, b \in \mathbb{R}$ ، آنگاه $aF + bG \in BV$.
- (ج) اگر F بر \mathbb{R} مشتق پذیر و F' کراندار باشد، آنگاه (بنا بر قضیه مقدار میانگین) برای هر $-\infty < a, b < \infty$ ، $F \in BV([a, b])$.
- (د) اگر $F(x) = \sin x$ ، آنگاه برای هر $-\infty < a, b < \infty$ ، $F \in BV([a, b])$ ، اما $F \notin BV$.
- (ه) اگر برای $x \neq 0$ ، $F(x) = x \sin(x^{-1})$ و $F(0) = 0$ ، آنگاه برای $0 < b \leq a$ یا $a < 0 \leq b$ ، $F \notin BV([a, b])$.
- بررسی درستی مثال های فوق به خواننده واگذار می شود (تمرین ۲۷).

۳.۲۶ لم. اگر $F \in BV$ حقیقی مقدار باشد، آنگاه $T_F + F$ و $T_F - F$ صعودی هستند.

برهان. هرگاه $x < y$ و $0 < \epsilon < x$ ، $\{x_0 < \dots < x_n = x, \epsilon > 0\}$ را چنان انتخاب می کنیم که:

$$\sum |F(x_j) - F(x_{j-1})| \geq T_F(x) - \epsilon.$$

در این صورت $\sum_1^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| + |F(y) - F(x)|$ یک مجموعه تقریب زنده برای $T_F(y)$ است و

$$\text{لذا، } F(y) = |F(y) - F(x)| + F(x)$$

$$\begin{aligned} T_F(y) \pm F(y) &\geq \sum_1^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| \\ &\quad + |F(y) - F(x)| \pm |F(y) - F(x)| \pm F(x) \\ &\geq T_F(x) - \epsilon \pm F(x). \end{aligned}$$

چون ϵ دل خواه است، $T_F(y) \pm F(y) \geq T_F(x) \pm F(x)$ و این همان چیزی است که می خواستیم. ■

۳.۲۷ قضیه.

(الف) $F \in BV$ اگر و تنها اگر $\operatorname{Re} F \in BV$ و $\operatorname{Im} F \in BV$.
 (ب) اگر $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، آنگاه $F \in BV$ اگر و تنها اگر F تفاضل دو تابع صعودی باشد؛ برای $F \in BV$ این دو تابع را می‌توان $\frac{1}{4}(T_F + F)$ و $\frac{1}{4}(T_F - F)$ گرفت.
 (ج) اگر $F \in BV$ ، آنگاه $F(x+) = \lim_{y \searrow x} F(y)$ و $F(x-) = \lim_{y \nearrow x} F(y)$ برای هر x وجود دارند همین‌طور $F(\pm\infty) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} F(y)$.
 (د) اگر $F \in BV$ ، مجموعه نقاطی که F در آنها ناپیوسته است شمارش پذیر می‌باشد.
 (ه) اگر $F \in BV$ و $G(x) = F(x+)$ ، آنگاه F' و G' تقریباً همه جا موجود و برابرند.

برهان. (الف) بدیهی است. در مورد (ب)، استلزام «اگر» آسان است (مثال‌های (الف) و (ب) از ۳.۲۵ را ببینید). برای اثبات «فقط اگر»، ملاحظه می‌شود که بنابر لم ۳.۲۶، تساوی $F = \frac{1}{4}(T_F + F) - \frac{1}{4}(T_F - F)$ تابع F را به صورت تفاضل دو تابع صعودی نمایش می‌دهد. همچنین، نامساوی‌های

$$T_F(y) \pm F(y) \geq T_F(x) \pm F(x) \quad (y > x)$$

ایجاب می‌کنند که

$$|F(y) - F(x)| \leq T_F(y) - T_F(x) \leq T_F(\infty) - T_F(-\infty) < \infty,$$

لذا F و در نتیجه $T_F \pm F$ کراندار است. بالاخره، (ج)، (د) و (ه) از (الف)، (ب) و قضیه ۳.۲۳ نتیجه می‌شوند. ■

نمایش $F = \frac{1}{4}(T_F + F) - \frac{1}{4}(T_F - F)$ برای تابع حقیقی مقداری چون F تجزیه جردن نامیده می‌شود و $\frac{1}{4}(T_F + F)$ و $\frac{1}{4}(T_F - F)$ تغییرات مثبت و منفی F نامیده می‌شوند. چون برای هر $x \in \mathbb{R}$ ،
 $x^+ = \max(x, 0) = \frac{1}{4}(1|x| + x)$ و $x^- = \max(-x, 0) = \frac{1}{4}(1|x| - x)$ داریم:

$$\frac{1}{4}(T_F \pm F)(x) = \sup \left\{ \sum_1^n [F(x_j) - F(x_{j-1})]^\pm : x_0 < \dots < x_n = x \right\} \pm \frac{1}{4}F(-\infty).$$

قسمت‌های (الف) و (ب) از قضیه ۳.۲۷ منجر به ارتباط بین BV و فضای اندازه‌های برل مختلط روی \mathbb{R} می‌شود. برای دقیق ساختن این مطلب، فضای NBV (برای «نرمال شده») را معرفی می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$NBV = \{F \in BV : F(-\infty) = 0 \text{ و } F \text{ پیوسته راست است}\}$$

ملاحظه می‌کنیم که اگر $F \in BV$ ، آنگاه تابع G که با $G(x) = F(x+) - F(-\infty)$ تعریف می‌شود در NBV است و $G' = F'$ ت. ه. (اینکه $G \in BV$ به آسانی از قسمت‌های (الف) و (ب) از قضیه ۳.۲۷ نتیجه می‌شود؛ اگر F حقیقی باشد و $F = F_1 - F_2$ که در آن F_1 و F_2 صعودی هستند، آنگاه

$$G(x) = F_1(x+) - [F_2(x-) + F(-\infty)]$$

که این هم تفاضلی از دو تابع صعودی است.)

۳.۲۸. ل.م. اگر $F \in BV$ ، آنگاه $T_F(-\infty) = 0$. اگر F پیوسته راست هم باشد، آنگاه T_F نیز پیوسته راست است. برهان. اگر $\varepsilon > 0$ و $x, x_n = x, x \in \mathbb{R}$ را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$\sum_1^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| \geq T_F(x) - \varepsilon.$$

از (۳.۲۴) معلوم می‌شود که $T_F(x) - T_F(x_0) \geq T_F(x) - \varepsilon$ و در نتیجه برای $y \leq x_0$ ، $T_F(y) \leq \varepsilon$. بنابر این $T_F(-\infty) = 0$ حال فرض می‌کنیم که F پیوسته راست است. $x \in \mathbb{R}$ و $\varepsilon > 0$ را مفروض گرفته و قرار می‌دهیم $\alpha = T_F(x+) - T_F(x)$ و $\delta > 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که هرگاه $0 < h < \delta$ ،

$$T_F(x+h) - T_F(x) < \varepsilon, \quad |F(x+h) - F(x)| < \varepsilon.$$

بنابر (۳.۲۴)، برای هر چنین h ای، $x_0 < \dots < x_n = x+h$ وجود دارند به طوری که

$$\sum_1^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| \geq \frac{3}{4} [T_F(x+h) - T_F(x)] \geq \frac{3}{4} \alpha$$

و در نتیجه

$$\sum_1^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| \geq \frac{3}{4} \alpha - |F(x_1) - F(x_0)| \geq \frac{3}{4} \alpha - \varepsilon.$$

مشابهاً، $x = t_0 < \dots < t_m = x_1$ وجود دارند به طوری که

$$\sum_1^m |F(t_j) - F(t_{j-1})| \geq \frac{3}{4} \alpha$$

و از این رو

$$\begin{aligned} \alpha + \varepsilon &> T_F(x+h) - T_F(x) \\ &\geq \sum_1^n |F(t_j) - F(t_{j-1})| + \sum_1^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| \\ &\geq \frac{3}{4} \alpha - \varepsilon. \end{aligned}$$

بنابر این $\alpha < 4\varepsilon$ و چون ε دل‌خواه است، $\alpha = 0$.

۳.۲۹ قضیه. اگر μ اندازه برل مختلطی روی \mathbb{R} باشد و $F(x) = \mu((-\infty, x])$ ، آنگاه $F \in NBV$ ، برعکس، اگر $F \in NBV$ ، اندازه برل مختلط یکتایی چون μ_F وجود دارد به طوری که $F(x) = \mu_F((-\infty, x])$ ؛ به علاوه،
 $|\mu_F| = \mu_{TF}$

برهان. اگر μ یک اندازه مختلط باشد، داریم $\mu = \mu_1^+ - \mu_1^- + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$ که در آن μ_j^\pm ها اندازه‌هایی متناهی هستند. اگر $F_j^\pm(x) = \mu_j^\pm((-\infty, x])$ ، آنگاه F_j^\pm صعودی و پیوسته راست است، $F_j^\pm(-\infty) = 0$ و $F_j^\pm(\infty) = \mu_j^\pm(\mathbb{R}) < \infty$ بنا بر این قسمت‌های الف) و ب) از قضیه ۳.۲۷، تابع

$$F = F_1^+ - F_1^- + i(F_2^+ - F_2^-)$$

در NBV واقع است. بر عکس، بنا بر قضیه ۳.۲۷ و لم ۳.۲۸، هر $F \in NBV$ را می‌توان به همین شکل نوشت که در آن F_j^\pm صعودی است و در NBV واقع است. مطابق با قضیه، هر F_j^\pm پدیدآورنده اندازه‌ای چون μ_j^\pm می‌شود، لذا $F(x) = \mu_F((-\infty, x])$ که در آن $\mu_F = \mu_1^+ - \mu_1^- + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$. اثبات این مطلب که $|\mu_F| = \mu_{TF}$ در تمرین ۲۸ خلاصه شده است. ■

اولین سؤال واضحی که مطرح می‌شود این است که: کدام توابع واقع در NBV به اندازه‌های μ متناظر می‌شوند به طوری که $\mu \perp m$ یا $\mu \ll m$ ؟ یکی از پاسخ‌ها به صورت زیر می‌باشد:

۳.۳۰ گزاره. اگر $F \in NBV$ ، آنگاه $F' \in L^1(m)$ ، به علاوه $\mu_F \perp m$ اگر و تنها اگر $F' = 0$ ، ه و $\mu_F \ll m$ اگر و تنها اگر $F(x) = \int_{-\infty}^x F'(t) dt$.
 برهان: فقط ملاحظه می‌کنیم که $F'(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_F(E_r)}{m(E_r)}$ در آن $E_r = (x, x+r]$ یا $E_r = (x-r, x]$ و قضیه ۳.۲۲ را به کار می‌بریم. (بنا بر قضیه ۱.۱۸، اندازه μ_F خود به خود منظم است). ■

شرط $\mu_F \ll m$ را می‌توان به صورت زیر بر حسب F نیز بیان کرد. تابعی چون $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ مطلقاً پیوسته نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عددی چون $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر مجموعه متناهی از بازه‌های مجزا مانند $(a_1, b_1), \dots, (a_N, b_N)$

$$\sum_1^N (b_j - a_j) < \delta \Rightarrow \sum_1^N |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon. \quad (۳.۳۱)$$

به طور کلی تر، F بر $[a, b]$ مطلقاً پیوسته خوانده می شود هرگاه وقتی (a_j, b_j) ها همگی در $[a, b]$ قرار دارند شرط فوق برقرار باشد. به وضوح، اگر F پیوسته مطلق باشد، آنگاه F پیوسته یکنواخت است (در ۳.۳۱ N را بگیرد). از سوی دیگر، اگر F همه جا مشتق پذیر باشد و F' کراندار باشد، آنگاه F مطلقاً پیوسته است، زیرا بنا بر قضیه مقدار میانگین

$$|F(b_j) - F(a_j)| \leq (\max |F'|)(b_j - a_j).$$

۳.۳۲ گزاره. اگر $F \in NBV$ ، آنگاه F مطلقاً پیوسته است. اگر و تنها اگر $m \ll \mu_F$.

برهان. اگر $m \ll \mu_F$ ، پیوستگی مطلق F با به کارگیری قضیه ۳.۵ در مورد مجموعه های $E = \bigcup_{j=1}^N (a_j, b_j)$ به دست می آید. برای اثبات عکس مطلب، فرض می کنیم E یک مجموعه برل باشد به طوری که $m(E) = 0$ و δ و ϵ همانهایی باشند که در تعریف پیوستگی مطلق به کار رفتند، آنگاه بنا بر قضیه ۱.۱۸ مجموعه های بازی مانند $E \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_N$ می توانیم بیابیم به طوری که $m(U_1) < \delta$ (و لذا برای هر j ، $\mu(U_j) < \delta$) و $\mu_F(U_j) \rightarrow \mu_F(E)$ هر اجتماع مجزایی از بازه های باز (a_j^k, b_j^k) است، و برای هر N

$$\sum_{k=1}^N |\mu_F((a_j^k, b_j^k))| \leq \sum_{k=1}^N |F(b_j^k) - F(a_j^k)| < \epsilon.$$

با فرض $N \rightarrow \infty$ به دست می آوریم: $|\mu_F(U_j)| < \epsilon$ و در نتیجه $|\mu_F(E)| \leq \epsilon$. چون ϵ دلخواه است، $\mu_F(E) = 0$ و این نشان می دهد که $m \ll \mu_F$.

۳.۳۳ نتیجه. اگر $f \in L^1_{loc}(m)$ ، آنگاه تابع $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ در NBV قرار دارد و مطلقاً پیوسته است و $f = F'$ است. برعکس، اگر $F \in NBV$ مطلقاً پیوسته باشد، آنگاه $F' \in L^1(m)$ و $F(x) = \int_{-\infty}^x F'(t) dt$.

برهان. این احکام مستقیماً از گزاره های ۳.۳۰ و ۳.۳۲ نتیجه می شوند.

چنانچه توابع را روی بازه های کراندار در نظر بگیریم، این احکام قدری ظریف تر می شوند.

۳.۳۴ لم. اگر F بر $[a, b]$ مطلقاً پیوسته باشد، آنگاه $F \in BV([a, b])$.

برهان. فرض می کنیم δ همان باشد که در تعریف پیوستگی مطلق F متناظر با $\epsilon = 1$ به کار می رود و N بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از $1 + \delta^{-1}(b - a)$ باشد. چنانچه $b = x_n < \dots < x_0 = a$ ، در صورت لزوم با وارد کردن نقاط زیر

۳.۲۹ قضیه. اگر μ اندازه برل مختلطی روی \mathbb{R} باشد و $F(x) = \mu((-\infty, x])$ ، آنگاه $F \in NBV$ ، برعکس، اگر $F \in NBV$ ، اندازه برل مختلط یکتایی چون μ_F وجود دارد به طوری که $F(x) = \mu_F((-\infty, x])$ ؛ به علاوه، $|\mu_F| = \mu_{TF}$.

برهان. اگر μ یک اندازه مختلط باشد، داریم $\mu = \mu_1^+ - \mu_1^- + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$ که در آن μ_j^\pm ها اندازه‌هایی متناهی هستند. اگر $F_j^\pm(x) = \mu_j^\pm((-\infty, x])$ ، آنگاه F_j^\pm صعودی و پیوسته راست است، $F_j^\pm(-\infty) = 0$ و $F_j^\pm(\infty) = \mu_j^\pm(\mathbb{R}) < \infty$ بنا بر این قسمت‌های (الف) و (ب) از قضیه ۳.۲۷، تابع

$$F = F_1^+ - F_1^- + i(F_2^+ - F_2^-)$$

در NBV واقع است. برعکس، بنا بر قضیه ۳.۲۷ و لم ۳.۲۸، هر $F \in NBV$ را می‌توان به همین شکل نوشت که در آن F_j^\pm صعودی است و در NBV واقع است. مطابق با قضیه، هر F_j^\pm پدیدآورنده اندازه‌ای چون μ_j^\pm می‌شود، لذا $F(x) = \mu_F((-\infty, x])$ که در آن $\mu_F = \mu_1^+ - \mu_1^- + i(\mu_2^+ - \mu_2^-)$. اثبات این مطلب که $|\mu_F| = \mu_{TF}$ در تمرین ۲۸ خلاصه شده است. ■

اولین سؤال واضحی که مطرح می‌شود این است که: کدام توابع واقع در NBV به اندازه‌های μ متناظر می‌شوند به طوری که $\mu \perp m$ یا $\mu \ll m$ یکی از پاسخ‌ها به صورت زیر می‌باشد:

۳.۳۰ گزاره. اگر $F \in NBV$ ، آنگاه $F' \in L^1(m)$ ، به علاوه $\mu_F \perp m$ اگر و تنها اگر $F' = 0$ ، هر $\mu_F \ll m$ اگر و تنها اگر $F(x) = \int_{-\infty}^x F'(t) dt$.
برهان. فقط ملاحظه می‌کنیم که $F'(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_F(E_r)}{m(E_r)}$ در آن $E_r = (x, x+r]$ یا $E_r = (x-r, x]$

و قضیه ۳.۲۲ را به کار می‌بریم. (بنا بر قضیه ۱.۱۸، اندازه μ_F خود به خود منظم است). ■

شرط $\mu_F \ll m$ را می‌توان به صورت زیر بر حسب F نیز بیان کرد تابعی چون $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ مطلقاً پیوسته نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ عددی چون $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر مجموعه متناهی از بازه‌های مجزا مانند $(a_1, b_1), \dots, (a_N, b_N)$

$$\sum_{j=1}^N (b_j - a_j) < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^N |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon. \quad (۳.۳۱)$$

به طور کلی تر، F بر $[a, b]$ مطلقاً پیوسته خوانده می شود هرگاه وقتی (a_j, b_j) ها همگی در $[a, b]$ قرار دارند شرط فوق برقرار باشد. به وضوح، اگر F پیوسته مطلق باشد، آنگاه F پیوسته یکنواخت است (در (۳.۳۱) را بگیرد). از سوی دیگر، اگر F همه جا مشتق پذیر باشد و F' کراندار باشد، آنگاه F مطلقاً پیوسته است، زیرا بنابر قضیه مقدار میانگین

$$|F(b_j) - F(a_j)| \leq (\max |F'|)(b_j - a_j).$$

۳.۳۲ گزاره. اگر $F \in NBV$ ، آنگاه F مطلقاً پیوسته است. اگر و تنها اگر $m \ll \mu_F$.

برهان. اگر $m \ll \mu_F$ ، پیوستگی مطلق F با به کارگیری قضیه ۳.۵ در مورد مجموعه های $E = \bigcup_{j=1}^N (a_j, b_j)$ به دست می آید. برای اثبات عکس مطلب، فرض می کنیم E یک مجموعه برل باشد به طوری که $m(E) = 0$ و δ و ϵ همانهایی باشند که در تعریف پیوستگی مطلق به کار رفتند، آنگاه بنابر قضیه ۱.۱۸ مجموعه های بازی مانند $E \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_j$ می توانیم بیابیم به طوری که $m(U_1) < \delta$ (ولذا برای هر j ، $\mu(U_j) < \delta$) و $\mu_F(U_j) \rightarrow \mu_F(E)$ هر U_j اجتماع مجزایی از بازه های باز (a_j^k, b_j^k) است، و برای هر N ،

$$\sum_{k=1}^N |\mu_F((a_j^k, b_j^k))| \leq \sum_{k=1}^N |F(b_j^k) - F(a_j^k)| < \epsilon.$$

با فرض $N \rightarrow \infty$ به دست می آوریم: $|\mu_F(U_j)| < \epsilon$ و در نتیجه $|\mu_F(E)| \leq \epsilon$. چون ϵ دلخواه است، $\mu_F(E) = 0$ و این نشان می دهد که $m \ll \mu_F$.

۳.۳۳ نتیجه. اگر $f \in L^1_{loc}(m)$ ، آنگاه تابع $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ در NBV قرار دارد و مطلقاً پیوسته است و $f = F'$.
 ۳.۳۴ برعکس، اگر $F \in NBV$ مطلقاً پیوسته باشد، آنگاه $F' \in L^1(m)$ و $F(x) = \int_{-\infty}^x F'(t) dt$.

برهان. این احکام مستقیماً از گزاره های ۳.۳۰ و ۳.۳۲ نتیجه می شوند.

چنانچه توابع را روی بازه های کراندار در نظر بگیریم، این احکام قدری ظریف تر می شوند.

۳.۳۴ لم. اگر F بر $[a, b]$ مطلقاً پیوسته باشد، آنگاه $F \in BV([a, b])$.

برهان. فرض می کنیم δ همان باشد که در تعریف پیوستگی مطلق F متناظر با $\epsilon = 1$ به کار می رود و N بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از $1 + \delta^{-1}(b - a)$ باشد. چنانچه $a = x_0 < \dots < x_n = b$ ، در صورت لزوم با وارد کردن نقاط زیر

تقسیم بیشتر، می‌توانیم بازه‌های (x_{j-1}, x_j) را به حداکثر N گروه از بازه‌های متوالی تقسیم کنیم به طوری که مجموع طول‌ها در هر گروه کمتر از δ باشد. مجموع $\sum |F(x_j) - F(x_{j-1})|$ روی هر یک از گروه‌ها حداکثر ۱ است و از این رو تغییر کل F روی $[a, b]$ حداکثر N است. ■

۳.۳۵ قضیه اساسی حسابان برای انتگرال لبگ. اگر $-\infty < a < b < \infty$ و $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ، آنگاه گزاره‌های زیر معادلند:

(الف) F بر $[a, b]$ مطلقاً پیوسته است.

(ب) به ازای تابعی چون $f \in L^1([a, b], m)$ ، $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt$ ،

(ج) F تقریباً همه جا بر $[a, b]$ مشتق پذیر است، $F' \in L^1([a, b], m)$ و $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t) dt$.

برهان. برای اثبات اینکه (الف) قسمت (ج) را ایجاب می‌کند، با کم کردن ثابتی از F می‌توان فرض کرد که $F(a) = 0$. اگر برای $x < a$ قرار دهیم $F(x) = 0$ و برای $x > b$ ، آنگاه بنابر لم ۳.۳۴، $F \in NBV$ ، لذا (ج) از نتیجه ۳.۳۳ حاصل می‌گردد. بدیهی است که (ج) قسمت (ب) را ایجاب می‌کند. بالاخره، نتیجه شدن (الف) از (ب) با فرض $f(t) = 0$ برای $t \notin [a, b]$ و با به کار گیری نتیجه ۳.۳۳ صورت می‌گیرد. ■

گاهی اوقات تجزیه زیر برای اندازه‌های برل روی \mathbb{R}^n مهم واقع می‌شود. اندازه برل مختلطی چون μ گسسته نامیده می‌شود هرگاه مجموعه شمارش پذیری مانند $\{x_j\} \subset \mathbb{R}^n$ و اعداد مختلطی چون c_j وجود داشته باشند به طوری که $\sum |c_j| < \infty$ و وقتی δ_x نقطه جرم در x است، $\mu = \sum c_j \delta_{x_j}$. از سوی دیگر، μ پیوسته نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ ، $\mu(\{x\}) = 0$. هر اندازه مختلط مانند μ را می‌توان به طور یکتا به صورت $\mu_d + \mu_c$ نوشت که در آن μ_d گسسته و μ_c پیوسته است. در واقع، فرض می‌کنیم $E = \{x : \mu(\{x\}) \neq 0\}$. برای هر زیر مجموعه شمارش پذیر مانند F از E سری $\sum_{x \in F} \mu(\{x\})$ مطلقاً (به $\mu(F)$) همگرا است، لذا برای هر k ، $\{x \in E : |\mu(\{x\})| > k^{-1}\}$ متناهی است، و از اینجا معلوم می‌شود که خود E شمارش پذیر است. بنابر این $\mu_d(A) = \mu(A \cap E)$ گسسته و $\mu_c(A) = \mu(A \setminus E)$ پیوسته است.

به وضوح، اگر μ گسسته باشد، آنگاه $m \perp \mu$ ؛ و اگر $m \ll \mu$ ، آنگاه μ پیوسته است. بنابر این، طبق قضیه ۳.۲۲، هر اندازه برل مختلط (منظم) روی \mathbb{R}^n را می‌توان به طور یکتا به صورت $\mu = \mu_d + \mu_{ac} + \mu_{sc}$ نوشت که در آن μ_d گسسته، μ_{ac} نسبت به m مطلقاً پیوسته و μ_{sc} یک اندازه «پیوسته تکین» است، یعنی، $\mu_{sc} \perp m$ پیوسته است اما $\mu_{sc} \perp m$. وجود اندازه‌های پیوسته تکین ناصفر در \mathbb{R}^n برای $n > 1$ به قدر کافی واضح است، اندازه مسطح روی کره واحد که در بند ۲.۷ مورد بحث واقع شد مثالی از این گونه اندازه‌ها است. برای $n = 1$ وجود چنین اندازه‌هایی چندان هم

بدیهی نیست؛ مطابق با قضیه ۳.۲۹، چنین اندازه‌هایی با توابع غیر ثابت $F \in NBV$ متناظر می‌شوند به طوری که پیوسته است اما $F' = 0$ ت. ه. تابع کانتور ساخته شده در بند ۱.۵ (که با قرار دادن $F(x) = 0$ برای $x < 0$ و $F(x) = 1$ برای $x > 0$ به کل \mathbb{R} تعمیم می‌یابد) یکی از این توابع است. با کمال تعجب، توابع پیوسته اکیندا صعودی F وجود دارند به طوری که $F' = 0$ ت. ه.؛ تمرین ۴۰ را ببینید.

اگر $F \in NBV$ ، رسم است که انتگرال تابعی چون g نسبت به اندازه μ_F را با $\int g dF$ یا $\int g(x) dF(x)$ نشان دهند؛ چنین انتگرال‌هایی انتگرال‌های لبگ - اشتیلیس نامیده می‌شوند. این بخش را با ارائه فرمول انتگرال گیری جزء، به جزء برای انتگرال‌های لبگ - اشتیلیس به پایان می‌رسانیم؛ در تمرین‌های ۳۴ و ۳۵ گونه‌های دیگری از این حکم را می‌توان دید.

۳.۳۶ قضیه. اگر F و G در NBV باشند و حداقل یکی از آنها پیوسته باشد، آنگاه برای $-\infty < a < b < \infty$ ،

$$\int_{(a,b]} F dG + \int_{(a,b]} G dF = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

برهان. بنابر قسمت‌های (الف) و (ب) از قضیه ۳.۲۷، F و G ترکیبات خطی توابعی در NBV هستند، لذا محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که کافی است F و G صعودی فرض شوند. برای پرهیز از اشتباه، فرض می‌کنیم G پیوسته است و قرار می‌دهیم $\Omega = \{(x, y) : 0 < x \leq y \leq b\}$. قضیه فوبینی را به کار برده و $\mu_F \times \mu_G(\Omega)$ را به دو روش محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mu_F \times \mu_G(\Omega) &= \int_{(a,b]} \int_{(a,y]} dF(x) dG(y) = \int_{(a,b]} [F(y) - F(a)] dG(y) \\ &= \int_{(a,b]} F dG - F(a)[G(b) - G(a)], \end{aligned}$$

و چون $G(x) = G(x-)$ ،

$$\begin{aligned} \mu_F \times \mu_G(\Omega) &= \int_{(a,b]} \int_{[x,b]} dG(y) dF(x) = \int_{(a,b]} [G(b) - G(x)] dF(x) \\ &= G(b)[F(b) - F(a)] - \int_{(a,b]} G dF. \end{aligned}$$

با تفریق طرفین این دو تساوی، حکم مطلوب به دست می‌آید. ■

تمرین‌ها

(۲۷) درستی احکام مثال‌های ۳.۲۵ را بررسی کنید.

(۲۸) اگر $F \in NBV$ ، فرض کنید $G(x) = |\mu_F|((-\infty, x])$. طبق مراحل زیر نشان دهید که $G = T_F$ و پس از آن نتیجه بگیرید که $|\mu_F| = \mu_{T_F}$.

(الف) از تعریف T_F نتیجه بگیرید که $T_F \leq G$.

(ب) $|\mu_F(E)| \leq \mu_{T_F}(E)$ وقتی E یک بازه است برقرار است و در نتیجه وقتی E یک مجموعه برل باشد برقرار خواهد بود.

(ج) $|\mu_F| \leq \mu_{T_F}$ و در نتیجه $G \leq T_F$. (تمرین ۲۱ را به کار ببرید.)

(۲۹) اگر $F \in NBV$ حقیقی باشد، آنگاه $\mu_F^+ = \mu_P$ و $\mu_F^- = \mu_N$ که در آن P و N تغییرات مثبت و منفی F هستند. (تمرین ۲۸ را به کار ببرید.)

(۳۰) تابعی صعودی روی \mathbb{R} بسازید که مجموعه ناپیوستگی‌هایش \mathbb{Q} باشد.

(۳۱) فرض کنید برای $x \neq 0$ ، $F(x) = x^2 \sin(x^{-1})$ و $G(x) = x^2 \sin(x^{-1})$ و $F(0) = G(0) = 0$. نشان دهید که:

(الف) F و G همه جا (حتی در $x = 0$) مشتق پذیرند.

(ب) $F \in BV([-1, 1])$ اما $G \notin BV([-1, 1])$.

(۳۲) اگر $F, F_1, F_2, \dots \in NBV$ و $F_j \rightarrow F$ نقطه به نقطه، آنگاه $T_F \leq \liminf T_{F_j}$.

(۳۳) اگر F بر \mathbb{R} صعودی باشد، آنگاه $F(b) - F(a) \geq \int_a^b F'(t) dt$.

(۳۴) فرض کنیم $- \infty < a < b < \infty$ و $F, G \in NBV$.

(الف) با تقلید از برهان قضیه ۳۶.۳، نشان دهید که

$$\int_{[a,b]} \frac{F(x) + F(x-)}{2} dG(x) + \int_{[a,b]} \frac{G(x) + G(x-)}{2} dF(x) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

(ب) اگر نقطه ای در $[a, b]$ نباشد که F و G هر دو در آن نقطه ناپیوسته باشند، آنگاه

$$\int_{[a,b]} F dG + \int_{[a,b]} G dF = F(b)G(b) - F(a-)G(a-).$$

(۳۵) اگر F و G بر $[a, b]$ مطلقاً پیوسته باشند، آنگاه FG نیز مطلقاً پیوسته است و

$$\int_a^b (FG' + GF')(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

(۳۶) فرض کنیم G تابع صعودی پیوسته ای بر $[a, b]$ ، $G(a) = c$ و $G(b) = d$. نشان دهید که:

الف) اگر $E \subset [c, d]$ یک مجموعه برل باشد، آنگاه $m(E) = \mu_G(G^{-1}(E))$. (نخست حالتی را در نظر بگیرید که E یک بازه است.)

ب) اگر f یک تابع اندازه پذیر برل باشد و بر $[c, d]$ انتگرال پذیر باشد، آنگاه $\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(G(x))dG(x)$

بلاخص، اگر G پیوسته مطلق باشد، آنگاه $\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(G(x))G'(x)dx$

ج) اگر G به جای پیوسته بودن فقط پیوسته راست باشد، ممکن است حکم (ب) درست نباشد.

(۳۷) فرض کنیم $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. ثابتی چون M وجود دارد به طوری که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$$

(یعنی، F پیوسته لیپ شیتسی است) اگر و تنها اگر F پیوسته مطلق باشد و $|F'| \leq M$ ت. ه.

(۳۸) اگر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد، نمودار f به عنوان زیرمجموعه ای از \mathbb{C} ، یعنی، $\{t + if(t) : t \in [a, b]\}$ را در نظر بگیرید. بنابر تعریف، طول L از این نمودار، سوپریم طول های همه چند ضلعی های محاطی است. (یک «چند ضلعی محاطی» اجتماعی از پاره خط هایی است که $t_{j-1} + if(t_{j-1})$ را به $t_j + if(t_j)$ ($1 \leq j \leq n$) وصل می کند، که در آن $a = t_0 < \dots < t_n = b$)

الف) فرض کنید $F(t) = t + if(t)$ ؛ در این صورت L تغییر کل F روی $[a, b]$ است.

ب) اگر f مطلقاً پیوسته باشد، آنگاه $L = \int_a^b [1 + f'(t)]^{1/2} dt$.

(۳۹) اگر $\{F_j\}$ دنباله ای از توابع صعودی نامنفی بر $[a, b]$ باشد به طوری که برای هر $x \in [a, b]$

$$F'(x) = \sum_1^\infty F'_j(x), \quad x \in [a, b]$$

آنگاه تقریباً برای هر $x \in [a, b]$ $F(x) = \sum_1^\infty F_j(x) < \infty$

(کافی است فرض کنید $F_j \in NBV$ و اندازه های μ_{F_j} را در نظر بگیرید.)

(۴۰) فرض کنید F تابع کانتور باشد (بند ۱.۵ را ببینید)، و تابع $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. فرض

می‌کنیم $\{[a_n, b_n]\}$ شمارشی از زیر بازه‌های بسته $[0, 1]$ با نقاط انتهایی گویا باشد و $F_n(x) = F\left(\frac{x - a_n}{b_n - a_n}\right)$. در این صورت $G = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} F_n$ بر $[a, b]$ پیوسته و اکیداً صعودی است و $G' = 0$ ه. (تمرین ۳۹ را به کار ببرید.)

(۴۱) فرض کنید $A \subset [0, 1]$ مجموعه برلی باشد به طوری که برای هر زیر بازه مانند I از $[0, 1]$ ،
 $0 < m(A \cap I) < m(I)$.

(تمرین ۲۳ از فصل ۱ را ببینید.)

الف) فرض کنید $F(x) = m([0, 1] \cap A)$. در این صورت F بر $[0, 1]$ مطلقاً پیوسته و اکیداً صعودی است، اما بر مجموعه‌ای با اندازه مثبت، $F' = 0$.

ب) $G(x) = m([0, x] \cap A) - m([0, x] \setminus A)$. در این صورت G بر $[0, 1]$ مطلقاً پیوسته است اما G روی هیچ زیربازه‌ای از $[0, 1]$ یکنوا نیست.

(۴۲) تابعی چون $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ($-\infty \leq a < b \leq \infty$) محدب نامیده می‌شود هرگاه برای هر $s, t \in (a, b)$ هر $\lambda \in (0, 1)$

$$F(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \lambda F(s) + (1 - \lambda)F(t).$$

(از نظر هندسی، این تعریف می‌گوید که نمودار F روی بازه‌ای که از s شروع و به t ختم می‌شود زیر خط واصل $(s, F(s))$ به $(t, F(t))$ قرار گیرد.)

الف) F محدب است اگر و تنها اگر برای هر $s, t, s', t' \in (a, b)$ با شرط $s < t \leq t'$ و $s \leq s' < t'$ داشته باشیم:

$$\frac{F(t) - F(s)}{t - s} \leq \frac{F(t') - F(s')}{t' - s'}$$

ب) F محدب است اگر و تنها اگر F بر هر زیربازه فشرده از (a, b) مطلقاً پیوسته باشد و F' (بر مجموعه‌ای که تعریف می‌شود) صعودی باشد.

ج) اگر F محدب باشد و $t_0 \in (a, b)$ آنگاه عددی چون $\beta \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که برای هر $t \in (a, b)$
 $F(t) - F(t_0) \geq \beta(t - t_0)$

د) (نامساوی ینسن) اگر (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای اندازه با $\mu(X) = 1$ باشد، $g : X \rightarrow (a, b)$ در $L^1(\mu)$ باشد و F بر (a, b) محدب باشد، آنگاه

$$F\left(\int g d\mu\right) \leq \int F \circ g d\mu.$$

(در ج) فرض کنید $t_0 = \int g d\mu$ و $t = g(x)$ و سپس انتگرال بگیرید.)

۳.۶ یادداشت‌ها و مراجع

بند ۳.۲: قضیه لبگ - رادون - نیکودیم توسط لبگ [۹۲] برای حالتی ثابت شد که μ اندازه لبگ روی \mathbb{R}^n بود. این قضیه تحت فرض $\mu \ll \nu$ توسط رادون در [۱۱۱] به اندازه‌های برل منظم دل‌خواه روی \mathbb{R}^n تعمیم یافت و نیکودیم بود که در [۱۰۷] آن را به اندازه‌های روی فضاهاى مجرد تعمیم داد. برهانی که در این کتاب برای قضیه لبگ - رادون - نیکودیم آوردیم مشابه برهانی است که هالموس در [۶۲] آورده است اما کارآمدتر از آن است؛ آن را از ال. لومیس یاد گرفته‌ام.

بند ۳.۳: شاخص

$$|\nu|(E) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |\nu(E_j)| : n \in \mathbb{N}, E_1, \dots, E_n \text{ مجزا هستند}, E = \bigcup_{j=1}^n E_j \right\}$$

برای تغییر کل اندازه مختلطی چون ν (تمرین ۲۱ را ببینید) معمولاً به عنوان تعریف $|\nu|$ گرفته می‌شود. به نظر می‌رسد تعریف ما بسیار مفیدتر بوده و قطعاً کار کردن با آن آسان‌تر است.

بند ۳.۴: قضایای ۳.۲۱ و ۳.۲۲ به لبگ نسبت داده شده‌اند، اما استدلالی که ما به کار برده ایم اساساً همان استدلالی است که وینر در [۱۶۲] آورده است و تابع ماکسیمال Hf در بعد یک، نخستین بار توسط هاردی و لیتلود [۶۵] مورد مطالعه قرار گرفته است. برهانی که برای قضیه ۳.۱۸ آورده ایم شرحی از یک تکنیک کلی است که در سال‌های اخیر بسیار مورد استفاده قرار گرفته است. این تکنیک، یعنی کنترل رفتار حد گیری از خانواده‌ای از عملگرها به کمک میانگین برآوردها روی یک تابع ماکسیمال مناسب.

لم ۳.۱۵، یعنی نمونه ساده شده لم پوششی وینر، از رودین [۱۲۵] گرفته شده است. قضیه پوششی قدیمی‌تر و ظریف‌تری هم وجود دارد که به ویتالی منسوب است و در موارد مشابه به کار می‌رود:

اگر $E \subset \mathbb{R}^n$ و \mathcal{Q} خانواده‌ای از مکعب‌ها باشد به طوری که هر $x \in E$ در اعضای \mathcal{Q} با قطر به دلخواه کوچک مشمول باشد، آنگاه دنباله‌ای مجزا (متناهی یا نامتناهی) مانند $\{Q_j\} \subset \mathcal{Q}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$m(E \setminus \bigcup_j Q_j) = 0$$

برهان‌ها را می‌توان در برخی کتاب‌ها یافت، برای مثال، کهن [۲۷، ۶.۲]، فالكونر [بند ۱.۳، ۳۹] و هویت و استرامبرگ [بند ۱۷، ۷۶].

بند ۳.۵: احکام اصلی این بخش به لبگ و ویتالی نسبت داده می‌شوند؛ هاو کینس [۷۰] را به خاطر مراجع مفصل‌تر ببینید. تمرین ۳۶ شکلی از فرمول تغییر متغیر را برای انتگرال‌های لبگ به دست می‌دهد؛ شکل دیگری از آن را می‌توان در سرین و واربرگ [۱۳۳] یافت. تمرین ۳۹ قضیه‌ای از فوینزی است و مثال ذکر شده در تمرین ۴۰ به براون [۲۱] منسوب است.

انتگرال اشتیلیس $\int_a^b g dF$ در بدو امر تحت این فرض که F تابعی صعودی بر $[a, b]$ است به صورت حد مجموع‌های ریمان $\sum g(t_j) \{F(t_j) - F(t_{j-1})\}$ تعریف شد. نظریهٔ چنین انتگرال‌های «ریمان - اشتیلیس» بسیار شبیه به نظریهٔ انتگرال ریمان معمولی است، اما برای به راه انداختن آن در حالتی که F و g هر دو مجاز به ناپیوسته بودن باشند دقت و آفری می‌طلبد.

ترهورس [۱۴۸] را ببینید که قضیه‌ای مشابه با قضیه ۲.۲۸ برای انتگرال‌های اشتیلیس آورده است. مثال تابع کانتور نشان می‌دهد که یک تابع پیوسته تقریباً همه جا مشتق پذیر لزوماً انتگرال مشتقش نیست. این یک قضیه بی اندازه نابدیهی است که اگر F بر $[a, b]$ پیوسته باشد و $F'(x)$ برای هر $x \in [a, b] \setminus A$ وجود داشته باشد که در آن A شمارش پذیر است و $F' \in L^1$ ، آنگاه F مطلقاً پیوسته است و در نتیجه می‌توان F را با انتگرالگیری از روی F' باز یافت. یک برهان در کهن [بند ۲۷، ۶۰۳] می‌توان یافت؛ برای حالت نسبتاً ساده $A = \emptyset$ ، رودین [قضیه ۱۲۵، ۷۰۲۶] را ببینید.

اما این پایان کار نیست، زیرا تابع همه جا مشتق پذیری مانند F وجود دارد به طوری که $F' \in L^1$ شاید ساده‌ترین مثال $F(x) = x \sin(x^{-1})$ باشد (تمرین ۳۱ را ببینید). در اینجا تنها مشکل در $x = 0$ است، بنا بر این برای $a \leq 0 \leq b$ می‌توان $\int_a^b F' dt$ را به عنوان یک انتگرال ناسره، یعنی، حد انتگرال‌های لبگ روی $[-\varepsilon, \varepsilon] \setminus [a, b]$ در نظر گرفت که در آن $\varepsilon \rightarrow 0$. اما به دور از مشکل می‌توان مثال‌هایی ساخت که در آنها تکین‌های F' چنان در هم پیچیده اند که F' روی هیچ بازه‌ای انتگرال پذیر لبگ نیست. در این وضعیت انتگرال لبگ به سادگی کم می‌آورد. اما انتگرال هنستوک - کارزوایل (یا انتگرال‌های دنجوی یا پرون) که در ۲.۸ بحث شد به قدری توانمند است که از چنین F' ‌ای انتگرالگیری می‌شود و با استفاده از این انتگرال قضیه اساسی تعمیم یافتهٔ حسابان به دست می‌آید: اگر F همه جا بر $[a, b]$ مشتق پذیر باشد، آنگاه

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) dt.$$

فصل چهارم توپولوژی

مفاهیم حد، همگرایی و پیوستگی قلب آنالیز هستند و داشتن چهارچوبی کلی برای مطالعه آنها که کشفیات سنتی را به عنوان حالت‌های خاص دربرگیرد مفید است. یکی از این چهارچوب‌ها که ارجحیت آن عدم نیاز به بسیاری از ایده‌های خارج از آنهاست است که در آنالیز روی فضای اقلیدسی ظاهر می‌شوند، فضاهای متریک است. اما فضاهای متریک برای توصیف بخشی بعضی از انواع همگرایی بسیار سنتی به قدر کافی کلی نیستند، برای مثال، همگرایی نقطه به نقطه توابع روی \mathbb{R} . با گرفتن مجموعه‌های باز غیر از مجموعه‌های باز نسبت به یک متر به عنوان داده اولیه، می‌توان نظریه‌ای پایدارتر ساخت و این همان نظریه‌ای است که می‌خواهیم آن را در این فصل بیان کنیم.

۴.۱ فضاهای توپولوژیک

فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی باشد. یک توپولوژی روی X خانواده‌ای مانند \mathcal{T} از زیرمجموعه‌های X است که شامل X و \emptyset است و تحت اجتماع‌های دل‌خواه و اشتراک‌های متناهی بسته است. (یعنی، اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$ ، آنگاه $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$ و اگر $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$ ، آنگاه $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$). زوج (X, \mathcal{T}) یک فضای توپولوژیک نامیده می‌شود. اگر \mathcal{T} معلوم باشد، به طور خلاصه به X فضای توپولوژیک خواهیم گفت. چند مثال را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

- اگر X مجموعه‌ای ناتهی باشد، $\mathcal{P}(X)$ و $\{\emptyset, X\}$ توپولوژی‌های روی X هستند. این توپولوژی‌ها به ترتیب توپولوژی گسسته و توپولوژی بدیهی (ناگسسته) نامیده می‌شوند.
- اگر X مجموعه‌ای نامتناهی باشد، $\{U \subset X : U = \emptyset \text{ یا } U^c \text{ متناهی است}\}$ یک توپولوژی موسوم به توپولوژی متمم متناهی روی X است.
- اگر X یک فضای متریک باشد، گردایه همه مجموعه‌های باز نسبت به متر، یک توپولوژی روی X است.

• اگر (X, T) یک فضای توپولوژیک باشد و $Y \subset X$ ، آنگاه $T_Y = \{U \cap Y : U \in T\}$ یک توپولوژی روی Y موسوم به توپولوژی نسبی اِقاء شده با T است.
اینک اصطلاحات زیربنایی فضاهای توپولوژیک را می‌آوریم. قبلاً با بسیاری از این مفاهیم در درس فضاهای متری آشنا شدیم. تا اطلاع ثانوی، (X, T) فضای توپولوژیک ثابتی خواهد بود.

اعضای T مجموعه‌های باز و متمم‌هایشان مجموعه‌های بسته نامیده می‌شوند. چنانچه $Y \subset X$ ، زیرمجموعه‌های باز (بسته) Y نسبت به توپولوژی نسبی، باز (بسته) نسبی نامیده می‌شوند. به کمک قوانین دمرگان مشاهده می‌کنیم که خانواده مجموعه‌های بسته تحت اشتراک‌های دل‌خواه و اجتماع‌های متناهی بسته است. اگر $A \subset X$ ، اجتماع همه مجموعه‌های باز مشمول در A درون A نامیده می‌شود و اشتراک همه مجموعه‌های بسته شامل A بستار A نامیده می‌شود. درون و بستار A را به ترتیب با A° و \bar{A} نشان می‌دهیم. به وضوح A° بزرگترین مجموعه باز مشمول در A است و \bar{A} کوچکترین مجموعه بسته شامل A است و داریم $(A^\circ)^\circ = A^\circ$ و $(\bar{A})^\circ = \emptyset$. تفاضل $\bar{A} \setminus A^\circ = \bar{A} \cap \bar{A}^c$ است و با ∂A نشان داده می‌شود. اگر $\bar{A} = X$ ، آنگاه A در X چگال نامیده می‌شود. از طرف دیگر، اگر $(\bar{A})^\circ = \emptyset$ ، آنگاه A هیچ‌جاچگال نامیده می‌شود. اگر $x \in X$ (یا $E \subset X$)، یک همسایگی x (یا E) مجموعه‌ای مانند $A \subset X$ است به طوری که $x \in A^\circ$ (یا $E \subset A^\circ$). بنابراین، مجموعه‌ای چون A باز است اگر و تنها اگر A یک همسایگی خودش باشد. (برخی از مؤلفین، قید می‌کنند که همسایگی‌ها مجموعه‌هایی باز باشند؛ ما چنین نکرده‌ایم) نقطه‌ای چون x یک نقطه انباشتگی A نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر همسایگی مانند U از x ، $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. (عبارات دیگری که گاهی اوقات برای همین مفهوم به کار می‌روند عبارتند از «نقطه بستاری» و «نقطه حدی». بعداً از «نقطه بستاری» به معنی چیز دیگری استفاده خواهیم کرد).

۱. گزاره. برای $A \subset X$ ، فرض کنید $\text{acc}(A)$ مجموعه نقاط انباشتگی A باشد. در این صورت $\bar{A} = A \cup \text{acc}(A)$ و بسته است اگر و تنها اگر $\text{acc}(A) \subset A$.

برهان. اگر $x \notin \bar{A}$ ، آنگاه A° یک همسایگی x است که A را قطع نمی‌کند، لذا $x \notin \text{acc}(A)$ ؛ بنابراین $\bar{A} \subset A \cup \text{acc}(A)$. چنانچه $x \notin A \cup \text{acc}(A)$ ، مجموعه‌ای باز مانند U شامل x وجود دارد به طوری که $U \cap A = \emptyset$ ، لذا $x \notin \bar{A}$ و $\bar{A} \subset A \cup \text{acc}(A)$. بالاخره A بسته است اگر و تنها اگر $\bar{A} = A$ و این تساوی فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که $\text{acc}(A) \subset A$.

اگر T_1 و T_2 توپولوژی‌هایی روی X باشند به طوری که $T_1 \subset T_2$ ، می‌گوییم T_1 ضعیف‌تر (یا درشت‌تر) از T_2 است یا T_1 قوی‌تر (یا ظریف‌تر) از T_2 است. به وضوح توپولوژی بدیهی ضعیف‌ترین توپولوژی روی X است، در حالی که توپولوژی گسسته قوی‌ترین توپولوژی است. اگر $E \subset \mathcal{P}(X)$ ، یکتا توپولوژی ضعیف $T(E)$ روی X که شامل E است وجود دارد؛ این

توپولوژی اشتراک همهٔ توپولوژی‌هایی روی X است که شامل \mathcal{E} هستند. این توپولوژی، توپولوژی تولید شده به وسیلهٔ \mathcal{E} نامیده می‌شود و گاهی اوقات \mathcal{E} یک زیر پایه برای $T(\mathcal{E})$ نامیده می‌شود.

اگر T یک توپولوژی روی X باشد، یک پایهٔ موضعی برای T در $x \in X$ خانواده‌ای مانند $\mathcal{N} \subset T$ است به طوری که

- به ازای هر $x \in V, V \in \mathcal{N}$ ؛

- اگر $U \in T$ و $x \in U$ ، آنگاه عضوی چون V از \mathcal{N} وجود دارد به طوری که $V \subset U$.

یک پایه برای T خانواده‌ای مانند $\mathcal{B} \subset T$ است که شامل یک پایهٔ موضعی برای T در هر $x \in X$ باشد. برای مثال، اگر X یک فضای متری باشد، گردایهٔ گوی‌های باز با مرکز x یک پایهٔ موضعی برای توپولوژی متری در x است و گردایهٔ همهٔ گوی‌های باز در X یک پایه است.

۲. گزاره. اگر T یک توپولوژی روی X باشد و $\mathcal{E} \subset T$ ، آنگاه \mathcal{E} یک پایه برای T است اگر و تنها اگر هر مجموعهٔ ناتهی مانند $U \in T$ اجتماعی از اعضای \mathcal{E} باشد.

برهان. اگر \mathcal{E} یک پایه باشد، $U \in T$ و $x \in U$ ، آنگاه $V_x \in \mathcal{E}$ با خاصیت $V_x \subset U$ وجود دارد، لذا $U = \bigcup_{x \in U} V_x$ به عکس، اگر هر مجموعهٔ ناتهی مانند $U \in T$ اجتماعی از اعضای \mathcal{E} باشد، آنگاه $\{V \in \mathcal{E} : x \in V\}$ به وضوح یک پایهٔ موضعی در x است، لذا \mathcal{E} یک پایه است. ■

۳. گزاره. اگر $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ، برای آنکه \mathcal{E} پایه‌ای برای یک توپولوژی روی X باشد لازم و کافی است دو شرط زیر صادق باشند:

(الف) هر $x \in X$ در یک $V \in \mathcal{E}$ مشمول شود؛

(ب) اگر $U, V \in \mathcal{E}$ و $x \in U \cap V$ ، آنگاه عضوی مانند W از \mathcal{E} وجود داشته باشد که $x \in W \subset (U \cap V)$.

برهان. لزوم شرایط واضح است، زیرا اگر U و V باز باشند، آنگاه $U \cap V$ نیز باز است. برای اثبات کفایت شرایط، فرض می‌کنیم:

$$T = \{U \subset X : x \in V \subset U \text{ از } \mathcal{E} \text{ وجود دارد که } x \in V \text{ عضو } V \text{ از } \mathcal{E} \text{ است}\}.$$

در این صورت، طبق شرط (الف)، به بداهت $\phi \in T$ و به وضوح T تحت اجتماع‌ها بسته است. چنانچه $U_1, U_2 \in T$ و $V_1, V_2 \in \mathcal{E}$ چنان وجود دارند که $x \in V_1 \subset U_1$ و $x \in V_2 \subset U_2$ و بنابر شرط (ب) عضو W از \mathcal{E} چنان وجود دارد که $x \in W \subset (V_1 \cap V_2)$. بنابر این $U_1 \cap U_2 \in T$. لذا به استقراء T تحت اشتراک‌های متناهی بسته است. بنابر این T یک توپولوژی است و به وضوح \mathcal{E} پایه‌ای برای T است. ■

۴.۴ گزاره. اگر $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ، آنگاه توپولوژی $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ که با \mathcal{E} تولید می‌شود شامل \emptyset ، X و همه اجتماع‌های اشتراک‌های متناهی از اعضای \mathcal{E} است.

برهان. خانواده اشتراک‌های متناهی از مجموعه‌های واقع در \mathcal{E} ، به همراه X در شرایط گزاره ۴.۳ صدق می‌کنند، لذا بنابر گزاره ۴.۲ خانواده همه اجتماع‌های چنین مجموعه‌هایی به همراه \emptyset یک توپولوژی است. به وضوح این توپولوژی در $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ مشمول است، بنابراین با $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ برابر است. ■

توجه شود که چگونه سادگی این گزاره در برابر حکم متناظر برای σ -جبرها قرار می‌گیرد. (گزاره ۱.۲۳). آنچه در اینجا کار را آسان‌تر می‌کند این است که فقط اشتراک‌های متناهی دخالت داده می‌شوند.

مفهوم فضای توپولوژیک به قدر کافی کلی است که عمده مثال‌های جالب را در بر می‌گیرد، اما - با همان اشارات - برای به دست آوردن قضایای جالب نیز کلی است.

برای بنا نهادن نظریه‌ای خردمندانه همواره بایستی به رده‌ای از فضاها خاص محدود شویم. بقیه این فصل به کندوکاوی از دو نوع محدودیت که توأمأ اعمال می‌شوند، اختصاص دارد که اصول موضوع شمارش‌پذیری و جدایی‌پذیری نامیده می‌شوند.

یک فضای توپولوژیک مانند (X, \mathcal{T}) در اصل موضوع اول شمارش‌پذیری صدق می‌کند یا شمارش‌پذیر اول است، هرگاه در هر نقطه از X یک پایه موضعی شمارش‌پذیر وجود داشته باشد. (مشاهده این مطلب مفید است که اگر X شمارش‌پذیر اول باشد، آنگاه به ازای هر x از X یک پایه موضعی مانند $\{U_n\}_1^\infty$ وجود دارد به طوری که به ازای هر n ، $U_{n+1} \supset U_n$ در واقع

اگر $\{V_n\}_1^\infty$ پایه موضعی شمارش‌پذیری در x باشد، می‌توانیم U_n را $\bigcap_1^n V_n$ بگیریم، فضای (X, \mathcal{T}) در اصل موضوع دوم

شمارش‌پذیری صدق می‌کند، یا شمارش‌پذیر دوم است هرگاه \mathcal{T} یک پایه شمارش‌پذیر داشته باشد. همچنین، (X, \mathcal{T})

جدایی‌پذیر است، هرگاه X زیرمجموعه چگال شمارش‌پذیری داشته باشد. هر فضای متری شمارش‌پذیر اول است (گوی‌های با

شعاع گویا حول x یک پایه موضعی در x است) و یک فضای متری شمارش‌پذیر دوم است اگر و تنها اگر جدایی‌پذیر باشد

(تمرین ۵). گزاره زیر را می‌توان به طور جزئی تعمیم داد:

۴.۵ گزاره. هر فضای شمارش‌پذیر دوم، جدایی‌پذیر است.

برهان. اگر X شمارش‌پذیر دوم باشد، \mathcal{E} را پایه‌ای شمارش‌پذیر برای توپولوژی انگاشته و به ازای هر $U \in \mathcal{E}$ نقطه‌ای

مانند $x_U \in U$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت متمم بستار $\{x_U : U \in \mathcal{E}\}$ مجموعه‌بازی است که شامل هر $U \in \mathcal{E}$

نیست؛ بنابر این مجموعه مذکور تهی است و $\{x_U : U \in \mathcal{E}\}$ چگال است. ■

دنباله‌ای چون $\{x_j\}$ در یک فضای توپولوژیک مانند X به $x \in X$ همگرا است (با نماد: $x \rightarrow x_j$) هرگاه به ازای هر همسایگی مانند U از x عددی طبیعی مانند J وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $j > J$ ، $x_j \in U$. فضاهای شمارش‌پذیر اول این خوبی را دارند که مقوله‌هایی مثل بستار و پیوستگی را می‌توان بر حسب همگرایی دنباله‌ها بیان کرد. همان‌طور که خواهیم دید این چیزی نیست که در فضاهای کلی‌تر برقرار باشد؛ برای مثال:

۶. ۴ گزاره. اگر X شمارش‌پذیر اول باشد و $A \subset X$ ، آنگاه $x \in \bar{A}$ اگر و تنها اگر دنباله‌ای مانند $\{x_j\}$ در A وجود داشته باشد که به x همگرا است.

برهان. فرض می‌کنیم $\{U_j\}$ پایه موضعی شمارش‌پذیری در x باشد به طوری که به ازای هر j ، $U_{j+1} \subset U_j$. اگر $x \in \bar{A}$ ، آنگاه به ازای هر j ، $U_j \cap A \neq \emptyset$. عضوی مانند x_j از $U_j \cap A$ انتخاب می‌کنیم؛ چون به ازای $j > k$ ، $U_k \subset U_j$ و هر همسایگی x شامل یک U_j است، واضح است که $x \rightarrow x_j$ از طرف دیگر، اگر $x \notin \bar{A}$ و $\{x_j\}$ دنباله‌ای در A باشد، آنگاه $x \in \bar{A}^c$ یک همسایگی از x است که شامل هیچکدام از x_j ها نیست، لذا $x_j \not\rightarrow x$. ■

نهایتاً، اصول موضوع جدایی‌پذیری را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اینها خواصی از یک فضای توپولوژیک هستند که با T_0, \dots, T_α شماره‌گذاری شده و وجود مجموعه‌های بازی را تضمین می‌کنند که نقاط یا مجموعه‌های بسته را از یکدیگر جدا می‌کنند. چنانچه X خاصیت T_j داشته باشد می‌گوییم X یک فضای T_j است یا اینکه توپولوژی روی X ، T_j است. T_0 : اگر $x \neq y$ ، مجموعه بازی شامل x وجود دارد به طوری که شامل y نیست یا مجموعه بازی شامل y وجود دارد به طوری که شامل x نیست.

T_1 : اگر $x \neq y$ ، مجموعه بازی شامل y وجود دارد به طوری که شامل x نیست.

T_2 : اگر $x \neq y$ ، دو مجموعه باز مجزا مانند U و V وجود دارند به طوری که $x \in U$ و $y \in V$.

T_3 : X یک فضای T_1 است و به ازای هر مجموعه بسته مانند $A \subset X$ و هر $x \in A^c$ مجموعه‌های باز مجزایی چون U و V وجود دارند به طوری که $x \in U$ و $A \subset V$.

T_4 : X یک فضای T_1 است و به ازای هر دو مجموعه بسته مانند A و B در X مجموعه‌های باز مجزایی چون U و V وجود دارند به طوری که $A \subset U$ و $B \subset V$.

T_5 ، T_6 و T_7 اسامی دیگری نیز دارند. هر فضای T_7 یک فضای هاسدورف است، هر فضای T_7 یک فضای منظم و هر فضای T_7 یک فضای نرمال است. (برخی از مؤلفین T_1 بودن فضاهای منظم و نرمال را ضروری نمی‌دانند) شرط جداسازی مفید مضاعفی نیز بین T_7 و T_8 وجود دارد که آن را در بند ۴.۲ مورد بررسی قرار خواهیم داد.

رده‌بندی T_1 ها که در زیر بیان شده است متمر ثمر است. خصوصاً این رده‌بندی نشان می‌دهد که فضاهای نرمال، منظم هستند و هر فضای منظم، هاسدورف است.

۴.۷ گزاره. X یک فضای هاسدورف است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$ مجموعه تک عضوی $\{x\}$ بسته باشد.

برهان. اگر X یک فضای T_1 باشد و $x \in X$ ، آنگاه به ازای هر $y \neq x$ مجموعه‌ای باز مانند U_y شامل y وجود دارد که x را ندارد؛ بنابراین این $\{x\}^c = \bigcup_{y \neq x} U_y$ باز است و لذا $\{x\}$ بسته است. به عکس، اگر $\{x\}$ بسته باشد، آنگاه $\{x\}^c$ مجموعه‌بازی است که شامل هر $y \neq x$ است. ■

نهایت فضاهای توپولوژیکی که در عمل (و به ویژه در این کتاب) به کار می‌رود فضاهای هاسدورف هستند یا پس از اصلاحاتی ساده، هاسدورف می‌شوند (شاید حالت اخیر به فضاهایی از قبیل فضاهای توابع انتگرال‌پذیر روی یک فضای اندازه مرتبط گردد که وقتی دو تابع تقریباً همه‌جا برابر را یکی می‌گیریم، با متر L^1 یک فضای هاسدورف می‌شوند.) اما معمولاً دو دسته از فضاهای توپولوژیک غیرهاسدورف به قدر کافی اهمیت دارند که توجه خاصی به آنها داشته باشیم: یکی توپولوژی خارج قسمتی روی فضایی متشکل از رده‌های هم‌ارزی که در تمرین‌های ۲۸ و ۲۹ مورد بررسی قرار می‌گیرد و دیگری توپولوژی زاریسکی روی یک وارپته جبری است. بدون توجه به تعریف یک وارپته جبری، توپولوژی زاریسکی روی یک فضای برداری را توصیف خواهیم کرد. فرض می‌کنیم K یک میدان و $K(X_1, \dots, X_n)$ حلقه چند جمله‌ای‌های n - متغیری روی K باشد. هر $P \in K(X_1, \dots, X_n)$ یک نگاشت چند جمله‌ای مانند $p: K^n \rightarrow K$ مشخص می‌کند که با جایگزینی اعضای K به جای مجهول‌های صوری X_1, \dots, X_n تعریف می‌شود. تناظر $P \rightarrow p$ دقیقاً وقتی یک به یک است که K نامتناهی باشد. وقتی p روی همه نگاشت‌های چند جمله‌ای تغییر کند، گردایه همه مجموعه‌های $\{0\}^{-1} p$ در K^n تحت اجتماع‌های متناهی بسته است زیرا $\{0\}^{-1} (pq) = \{0\}^{-1} p \cup \{0\}^{-1} q$ و این گردایه شامل خود K^n است ($p=0$ را در نظر می‌گیریم). بنابراین، مطابق با گزاره‌های ۲.۲، ۳ و ۴، گردایه مجموعه‌های به شکل $\bigcap_{\alpha \in A} p_\alpha^{-1}(\{0\})$ (که به ازای هر α ، p_α یک نگاشت چند جمله‌ای است) گردایه مجموعه‌های بسته برای یک توپولوژی (موسوم به توپولوژی زاریسکی) روی K^n است. بنابر گزاره ۴.۷ توپولوژی زاریسکی T_1 است زیرا اگر $a = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$ ، آنگاه

$$\{a\} = \bigcap_{j=1}^n p_j^{-1}(\{0\})$$

که در آن

$$p_j(X_1, \dots, X_n) = X_j - a_j.$$

اگر K متناهی باشد، توپولوژی زاریسکی گسسته است، اما اگر K نامتناهی باشد، آنگاه توپولوژی زاریسکی هاسدورف نیست. مطلب فوق دقیقاً بیان دگرگونه این حقیقت است که $K(X_1, \dots, X_n)$ یک دامنه صحیح است، یعنی اگر P و Q چند جمله‌ای‌های ناصفری باشد، آنگاه PQ ناصفر است. (برای $n=1$ ، توپولوژی زاریسکی توپولوژی متمم متناهی است.)

مثال‌هایی دیگری در تمرین‌ها گنجانده شده است که تشریح‌کننده اصول موضوع جداسازی و شمارش‌پذیری هستند.

تمرین‌ها

- (۱) اگر $\text{card}(X) \geq 2$ ، آنگاه یک توپولوژی روی X وجود دارد که T_0 است اما T_1 نیست.
- (۲) اگر X یک مجموعه نامتناهی باشد، توپولوژی متمم متناهی روی X یک فضای T_1 است اما T_1 نیست و شمارش‌پذیر اول است اگر و تنها اگر X شمارش‌پذیر باشد.
- (۳) هر فضای متریک نرمال است. (اگر A و B مجموعه‌هایی بسته در فضای متریک (X, ρ) باشد، مجموعه‌های متشکل از نقاط x را در نظر بگیرید که در آن $\rho(x, A) < \rho(x, B)$ یا $\rho(x, A) > \rho(x, B)$).
- (۴) فرض کنید $X = \mathbb{R}$ و T خانواده همه زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} باشد که به شکل $U \cup (V \cap Q)$ هستند که در آن U و V به معنی عادی باز هستند (در این صورت T یک توپولوژی هاسدورف است اما منظم نیست). (با توجه به تمرین ۳، این نشان می‌دهد که یک توپولوژی قوی‌تر از یک توپولوژی نرمال لزوماً نرمال یا حتی منظم نیست).
- (۵) هر فضای متریک جدایی‌پذیر، شمارش‌پذیر دوم است.
- (۶) فرض کنید $E = \{(a, b) : -\infty < a < b < \infty\}$
 - (الف) E یک پایه برای یک توپولوژی مانند T روی \mathbb{R} است که نسبت به آن توپولوژی، اعضای E هم باز و هم بسته‌اند.
 - (ب) T شمارش‌پذیر اول است اما شمارش‌پذیر دوم نیست. (اگر $x \in \mathbb{R}$ ، آنگاه هر پایه موضعی در x شامل مجموعه‌ای است که سوپرمنش x است.)
 - (ج) نسبت به T ، \mathbb{Q} در \mathbb{R} چگال است. (بنابر این، عکس گزاره ۴.۵ نادرست است.)
- (۷) اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، نقطه‌ای چون $x \in X$ یک نقطه بستاری دنباله $\{x_n\}$ است هرگاه برای هر همسایگی مانند U از x ، به ازای تعدادی نامتناهی از n ها، $x_n \in U$. نشان دهید که x یک نقطه بستاری $\{x_n\}$ است اگر و تنها اگر زیردنباله‌ای از $\{x_n\}$ به x همگرا باشد.

(۸) اگر X مجموعه‌ای نامتناهی با توپولوژی متمم متناهی باشد و $\{x_i\}$ دنباله‌ای از نقاط متمایز واقع در X باشد، آنگاه به ازای هر $x, x_i \in X, x_i \rightarrow x$.

(۹) اگر X یک مجموعه مرتب خطی باشد، آنگاه توپولوژی \mathcal{T} که به وسیله مجموعه‌های $\{x : x < a\}$ و $\{x : x > a\}$ ($a \in A$) تولید می‌شود توپولوژی ترتیبی نامیده می‌شود.

(الف) اگر $a, b \in X$ و $a < b$ ، آنگاه $U, V \in \mathcal{T}$ چنان وجود دارند که $a \in U, b \in V$ و به ازای هر $x \in U$ و هر $y \in V, x < y$. توپولوژی ترتیبی ضعیف‌ترین توپولوژی با این خاصیت است.

(ب) اگر $Y \subset X$ ، توپولوژی ترتیبی هرگز از توپولوژی نسبی روی Y که توسط توپولوژی ترتیبی روی X القا می‌شود قوی‌تر نیست اما ممکن است ضعیف‌تر باشد.

(ج) توپولوژی ترتیبی روی \mathbb{R} توپولوژی معمولی است.

(۱۰) فضای توپولوژیکی چون X ناهمبند نامیده می‌شود هرگاه دو مجموعه باز و ناتهی مانند U و V وجود داشته باشند به طوری که $U \cap V = \emptyset$ و $U \cup V = X$ ؛ در غیر این صورت X همبند است. وقتی از زیرمجموعه‌های همبند یا ناهمبند X صحبت می‌کنیم منظورمان همبندی یا ناهمبندی نسبت به توپولوژی نسبی روی آن‌ها است.

(الف) X همبند است اگر و تنها اگر \emptyset و X تنها زیرمجموعه‌هایی از X باشند که هم باز و هم بسته‌اند.

(ب) اگر $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های همبند X باشد به طوری که $\bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \neq \emptyset$ ، آنگاه $\bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha$ همبند است.

(ج) اگر $A \subset X$ همبند باشد، آنگاه \bar{A} همبند است.

(د) هر نقطه مانند x از X در زیرمجموعه همبند ماکسیمال یکتایی از X مشمول است و این زیرمجموعه بسته است (این زیرمجموعه مؤلفه همبند x نامیده می‌شود).

(۱۱) اگر E_1, \dots, E_n زیرمجموعه‌هایی از یک فضای توپولوژیک باشند، آنگاه بستار $\bigcup_1^n E_i$ مجموعه $\overline{\bigcup_1^n E_i}$ است.

(۱۲) فرض کنید X یک مجموعه باشد. یک عملگر بستاری کورانسکی روی X نگاشتی مانند $A \rightarrow A^*$ از $\mathcal{P}(X)$ به خودش است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$(i) \quad \emptyset^* = \emptyset$$

$$(ii) \quad A \subset A^*, \text{ به ازای هر } A$$

$$(iii) \quad (A^*)^* = A^*, \text{ به ازای هر } A$$

$$(iv) \text{ به ازای هر } A \text{ و } B, (A \cup B)^* = A^* \cup B^* .$$

الف) اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه نگاشت $A \mapsto \bar{A}$ یک عملگر بستاری کوراتوفسکی است (تمرین ۱۱ را به کار ببرید).

ب) به عکس، چنانچه یک عملگر بستاری کوراتوفسکی مفروض باشد، قرار می‌دهیم $\mathcal{F} = \{A \subset X : A = A^*\}$ و $\mathcal{T} = \{U \subset X : U^c \in \mathcal{F}\}$ ، در این صورت \mathcal{F} یک توپولوژی است، و به ازای هر مجموعه مانند $A \subset X$ ، A^* بستار A نسبت به \mathcal{F} است.

$$(۱۳) \text{ اگر } X \text{ یک فضای توپولوژیک باشد، } U \text{ در } X \text{ باز و } A \text{ در } X \text{ چگال باشد، آنگاه } \bar{U} = \overline{U \cap A}$$

۴.۲. نگاشت‌های پیوسته

فضاهای توپولوژیک نشیمنگاه طبیعی برای مفهوم پیوستگی هستند که می‌توان آن را به صورت زیر یا سراسری توصیف کرد یا موضعی. فرض کنیم X و Y فضاهایی توپولوژیک و f یک نگاشت از X به Y باشد. در این صورت f پیوسته نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر مجموعه باز مانند $V \subset Y$ ، $f^{-1}(V)$ در X باز باشد (چون $f^{-1}(A^c) = [f^{-1}(A)]^c$ ، شرط معادل دیگر این است که به ازای هر مجموعه بسته مانند $A \subset Y$ ، $f^{-1}(A)$ در X بسته باشد). اگر $x \in X$ در X پیوسته نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر همسایگی مانند V از $f(x)$ یک همسایگی مانند U از x وجود داشته باشد به طوری که $f(U) \subset V$ یا به طور معادل، هرگاه به ازای هر همسایگی مانند V از $f(x)$ ، $f^{-1}(V)$ یک همسایگی از x باشد، به وضوح، اگر $f : X \rightarrow Y$ و $g : Y \rightarrow Z$ پیوسته باشند (یا f در x و g در $f(x)$ پیوسته باشد، آنگاه $g \circ f$ در x پیوسته است. مجموعه نگاشت‌های پیوسته از X به Y را با $C(X, Y)$ نشان می‌دهیم).

۴.۸. گزاره. نگاشت $f : X \rightarrow Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر f در هر $x \in X$ پیوسته باشد.

برهان. اگر f پیوسته و V یک همسایگی از $f(x)$ باشد، آنگاه $f^{-1}(V)$ یک مجموعه باز شامل x است. پس f در x پیوسته است. برعکس، اگر $V \subset Y$ باز باشد آنگاه V یک همسایگی هر نقطه اش است، لذا $f^{-1}(V)$ یک همسایگی هر نقطه اش است بنابراین این $f^{-1}(V)$ باز است، لذا f پیوسته است. ■

۴.۹. گزاره. اگر توپولوژی روی Y با خانواده‌ای از مجموعه‌ها مانند \mathcal{E} تولید شود، آنگاه $f : X \rightarrow Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر $V \in \mathcal{E}$ ، $f^{-1}(V)$ در X باز باشد.

برهان. این مطلب از گزاره ۴.۴ و اینکه تابع مجموعه f^{-1} با اجتماعها و اشتراکها جابه‌جا می‌شود حاصل می‌گردد. ■

چنانچه $f: X \rightarrow Y$ دوسویی باشد f و f^{-1} هر دو پیوسته باشند، f یک همیومورفیسم نامیده می‌شود و گفته می‌شود که X و Y همیومورف هستند، در این حالت تابع مجموعه f^{-1} یک دوسویی از مجموعه‌های باز واقع در Y به مجموعه‌های باز واقع در X است، لذا می‌توان X و Y را تا جایی که خواص توپولوژیکی آنها مدنظر است یکسان گرفت. اگر $f: X \rightarrow Y$ یک به یک باشد ولی پوشا نباشد و وقتی روی $f(X) \subset Y$ توپولوژی نسبی گذاشته شد $f: X \rightarrow f(X)$ یک همیومورفیسم باشد، آنگاه f یک نشاننده نامیده می‌شود.

اگر X مجموعه‌ای دل‌خواه و $\{f_\alpha: X \rightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ خانواده‌ای از نگاشت‌های از X بتوی یک فضاهای توپولوژیک Y_α باشد، ضعیف‌ترین توپولوژی یکتایی چون T روی X وجود دارد که f_α ها را پیوسته می‌سازد، این توپولوژی، توپولوژی ضعیف تولید شده به وسیله $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ نامیده می‌شود، یعنی T توپولوژی تولید شده به وسیله مجموعه‌هایی است که به شکل $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ هستند که در آن $\alpha \in A$ و U_α در Y_α باز است.

مهمترین مثال از این ساختار، حاصلضرب دکارتی فضاهای توپولوژیک است. اگر $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد، توپولوژی حاصلضربی روی $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ توپولوژی ضعیف تولید شده به وسیله نگاشت‌های مؤلفه‌ای $\pi_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ است. وقتی یک حاصلضرب دکارتی از فضاهای توپولوژیک را مد نظر قرار می‌دهیم همواره آن را مجهز به توپولوژی حاصلضربی می‌دانیم مگر آنکه خلاف این مطلب را ذکر کنیم. بنابر گزاره ۴.۴، یک پایه برای توپولوژی حاصلضربی توسط مجموعه‌های زیر فراهم می‌شود:

$\bigcap_{j=1}^n \pi_{\alpha_j}^{-1}(U_{\alpha_j})$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ و به ازای $1 \leq j \leq n$ ، U_{α_j} در X_{α_j} باز است. این مجموعه‌ها را می‌توان به صورت $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ نوشت که در آن $U_\alpha = X_\alpha$ هرگاه $\alpha \neq \alpha_1, \dots, \alpha_n$. بالاخص، توجه کنید که اگر A نامتناهی باشد، حاصلضرب $\prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ از مجموعه‌های باز، در $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ باز است اگر و تنها اگر به ازای همه α ها به جز تعدادی متناهی از آن‌ها $U_\alpha = X_\alpha$.

۴.۱۰ گزاره. اگر به ازای هر α از A ، X_α هاسدورف باشد، آنگاه $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ هاسدورف است.

برهان. چنانچه x و y نقاط متمایزی از X باشند، باید به ازای یک α ، $\pi_\alpha(x) \neq \pi_\alpha(y)$ فرض می‌کنیم U و V همسایگی‌های مجزایی از $\pi_\alpha(x)$ و $\pi_\alpha(y)$ در X_α هستند. در این صورت $\pi_\alpha^{-1}(U)$ و $\pi_\alpha^{-1}(V)$ همسایگی‌های مجزایی از x و y در X هستند. ■

۴.۱۱ گزاره. اگر X_α ها ($\alpha \in A$) و Y فضاهایی توپولوژیک باشند و $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ، آنگاه $f: X \rightarrow Y$ پیوسته است اگر تنها اگر به ازای هر α ، $\pi_\alpha \circ f$ پیوسته باشد.

برهان. اگر به ازای هر α ، $f \circ \pi$ پیوسته باشد، آنگاه به ازای هر مجموعه باز مانند U_α در X_α ، $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha))$ در Y باز است. بنا بر گزاره ۴.۹، f پیوسته است، عکس مطلب واضح است. ■

(هرگاه فضاهای X_α همگی با فضای ثابتی چون X برابر باشند $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ درست مجموعه X^A متشکل از نگاشت‌های از A به X است و توپولوژی حاصلضربی دقیقاً توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه است. به طور دقیق تر:

۴.۱۲ گزاره. اگر X یک فضای توپولوژیک، A یک مجموعه ناتهی و $\{f_n\}$ دنباله ای در X^A باشد، آنگاه نسبت به توپولوژی حاصلضربی $f_n \rightarrow f$ اگر و تنها اگر $f_n \rightarrow f$ نقطه به نقطه.

برهان. مجموعه‌های

$$N(U_1, \dots, U_k) = \bigcap_{j=1}^k \pi_{\alpha_j}^{-1}(U_j) = \{g \in X^A : g(\alpha_j) \in U_j, 1 \leq j \leq k\}$$

که در آن $k \in \mathbb{N}$ و به ازای هر j ، U_j یک همسایگی از $f(\alpha_j)$ در X است یک پایه همسایه‌ای در f برای توپولوژی حاصلضربی تشکیل می‌دهند. اگر $f_n \rightarrow f$ نقطه به نقطه، آنگاه به ازای $n \geq N_j$ ، $f_n(\alpha_j) \in U_j$ و در نتیجه برای $n \geq \max(N_1, \dots, N_k)$ ، $f_n \in N(U_1, \dots, U_k)$ ؛ بنابر این نسبت به توپولوژی حاصلضربی $f_n \rightarrow f$ به عکس، اگر نسبت به توپولوژی حاصلضربی $f_n \rightarrow f$ ، $\alpha \in A$ و U یک همسایگی $f(\alpha)$ باشد، آنگاه به ازای n های بزرگ $f_n \in N(U) = \pi_\alpha^{-1}(U)$ ؛ بنابر این $f_n(\alpha) \in U$ و لذا $f_n(\alpha) \rightarrow f(\alpha)$. ■

به توابع با مقادیر حقیقی یا مختلط روی فضاهای توپولوژیک توجه خاصی خواهیم داشت. اگر X مجموعه‌ای دل خواه باشد، فضای همه توابع کراندار با مقادیر حقیقی (متناظراً مختلط) روی X را با $B(X, \mathbb{R})$ (متناظراً $B(X, \mathbb{C})$) نشان می‌دهیم. چنانچه X یک فضای توپولوژیک باشد فضاهای $C(X, \mathbb{R})$ و $C(X, \mathbb{C})$ از توابع پیوسته روی X تشکیل می‌شوند و تعریف می‌کنیم:

$$BC(X, F) = B(X, F) \cap C(X, F) \quad (F = \mathbb{R} \text{ یا } \mathbb{C}).$$

در بحث توابع با مختلط معمولاً \mathbb{C} را حذف کرده و به طور خلاصه خواهیم نوشت $B(X)$ ، $C(X)$ و $BC(X)$. چون جمع و ضرب توابع از T_1 به \mathbb{C} پیوسته‌اند، $C(X)$ و $BC(X)$ فضاهای برداری مختلطی هستند. اگر $f \in B(X)$ ، آنگاه نرم یکنواخت f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}.$$

به آسانی دیده می‌شود که $\rho(f, g) = \|f - g\|_\infty$ یک متر روی $B(X)$ است و همگرایی نسبت به این متر به طور خلاصه همگرایی یکنواخت روی X است. به وضوح $B(X)$ نسبت به متر یکنواخت کامل است، اگر $\{f_n\}$ به طور یکنواخت کشی باشد،

در F در F کامل
 آنگاه به ازای هر x دنباله $\{f_n(x)\}$ کشی است و اگر قرار دهیم $f(x) = \lim_n f_n(x)$ ، آنگاه به آسانی دیده می‌شود که

$$\|f_n - f\|_u \rightarrow 0$$

۴.۱۳ گزاره. هرگاه X یک فضای توپولوژیک باشد $BC(X)$ نسبت به متر یکنواخت زیرفضایی بسته از $B(X)$ است،
 بالاجز $BC(X)$ کامل است.

برهان. فرض می‌کنیم $\{f_n\} \subset BC(X)$ و $\|f_n - f\|_u \rightarrow 0$ برای عدد مفروض $\varepsilon > 0$ ، عدد طبیعی N را چنان
 بزرگ انتخاب می‌کنیم که برای $n > N$ ، $\|f_n - f\|_u < \frac{\varepsilon}{3}$ ، برای عدد طبیعی مفروض $n > N$ و $x \in X$ به دلیل
 پیوستگی f در x یک همسایگی مانند U از x وجود دارد به طوری که برای $y \in U$ ، $|f_n(y) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ، اما در این
 صورت

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

لذا f در x پیوسته است. بنابر گزاره ۴.۸ تابع f پیوسته است. ■

ممکن است در مورد فضای توپولوژیک مفروضی چون X ، $C(X)$ فقط شامل توابع ثابت باشد به وضوح در حالتی که X
 توپولوژی بدیهی دارد درست است اما حتی این موضوع وقتی که X منظم است می‌تواند رخ دهد. اما همان‌طور که قضایای
 اساسی زیر نشان می‌دهند فضاهای نرمال همیشه گونه‌های زیادی از توابع پیوسته دارند.

۴.۱۴ لم. فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌های بسته مجزایی از فضای نرمال X باشند و

$$\Delta = \{2^{-n}k : n \geq 1, 0 < k < 2^n\}$$

مجموعه اعداد گویای واقع در بازه $(0, 1)$ در مبنای ۲ باشد. خانواده‌ای مانند $\{U_r : r \in \Delta\}$ از مجموعه‌های باز در X وجود
 دارد به طوری که به ازای هر $r, s \in \Delta$ و $r < s$ ، $A \subset U_r \subset B^c$ و $\overline{U_r} \subset U_s$.

برهان. از نرمال بودن X معلوم می‌شود مجموعه‌های باز مجزایی چون V و \overline{W} وجود دارند به طوری که $A \subset V$ و
 $B \subset W$. فرض کنیم $U_1 = V$. در این صورت به دلیل بسته بودن W^c داریم:

$$A \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset W^c \subset B^c$$

اکنون به استقراء روی n ، U_r را برای $r = 2^{-n}k$ انتخاب می‌کنیم. فرض می‌کنیم که وقتی $0 < k < 2^n$ و $n \leq N-1$
 مجموعه U_r برای $r = 2^{-n}k$ انتخاب شده باشد. برای یافتن U_r به ازای $r = 2^{-N}(2j+1)$ ($0 \leq j < 2^{N-1}$) مشاهده

می‌کنیم که $\bar{U}_{r^{1-N}}$ و $(U_{r^{1-N}(j+1)})^c$ مجموعه‌های بسته مجزایی هستند (که در آن $\bar{U}_0 = A$ و $U_1^c = B$)، لذا مانند فوق می‌توان مجموعه‌ی بازی چون U_r انتخاب کرد که

$$A \subset \bar{U}_{r^{1-N}} \subset U_r \subset \bar{U}_r \subset U_{(j+1)r^{1-N}} \subset B^c.$$

به وضوح این U_r خواص مطلوب را دارند. ■

۴.۱۵ لم اوریسون. فرض کنیم X یک فضای نرمال باشد. اگر A و B مجموعه‌های بسته مجزایی در X باشند، آنگاه $f \in C(X, [0, 1])$ چنان وجود دارد که $f = 0$ بر A و $f = 1$ بر B .

برهان. فرض کنیم U_r همان باشد که در لم ۴.۱۴ برای $r \in \Delta$ تعریف شد و $U_1 = X$. به ازای $x \in X$ تعریف می‌کنیم $f(x) = \inf\{r : x \in U_r\}$. چون برای $0 < r < 1$ ، $A \subset U_r \subset B^c$ ، به وضوح برای $x \in A$ داریم $f(x) = 0$ و برای $x \in B$ ، $f(x) = 1$ و به ازای هر x از X ، $0 \leq f(x) \leq 1$. نشان دادن پیوستگی f باقیمانده است. بدین منظور، ملاحظه می‌کنیم که $f(x) < \alpha$ اگر و تنها اگر به ازای یک $r < \alpha$ ، $x \in U_r$ اگر و تنها اگر $x \in \bigcup_{r < \alpha} U_r$ ، لذا $f^{-1}((-\infty, \alpha)) = \bigcup_{r < \alpha} U_r$ باز است. همچنین اگر $f(x) > \alpha$ اگر و تنها اگر به ازای یک $r > \alpha$ ، $x \notin U_r$ اگر و تنها اگر $x \in \bigcup_{s \geq \alpha} (\bar{U}_s)^c$ (زیرا به ازای $s < r$ ، $\bar{U}_s \subset U_r$) اگر و تنها اگر $x \in \bigcup_{s > \alpha} (\bar{U}_s)^c$ ، لذا $f^{-1}((\alpha, \infty)) = \bigcup_{s > \alpha} (\bar{U}_s)^c$ باز است. چون پاره‌خط‌های نیم‌باز توپولوژی روی \mathbb{R} را تولید می‌کنند، بنابر گزاره ۴.۹ تابع f پیوسته است. ■

برهان لم اوریسون ممکن است در ابتدا غیر شفاف به نظر برسد، اما متعاقب آن دید هندسی ساده‌ای وجود دارد. اگر X به عنوان صفحه \mathbb{R}^2 و U_r به عنوان نواحی محدود به منحنی‌ها تلقی شود، آنگاه منحنی‌های ∂U_r یک «نگاشت توپولوژیک» از توابع f تشکیل می‌دهند.

۴.۱۶ قضیه‌ی توسیع تیتسه. فرض کنیم X یک فضای نرمال باشد. اگر A زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از X باشد و $f \in C(A, [a, b])$ ، آنگاه تابعی چون $F \in C(X, [a, b])$ وجود دارد به طوری که $F|_A = f$.

برهان. با جایگزینی $\frac{f-a}{b-a}$ به جای f می‌توان فرض کرد که $[a, b] = [0, 1]$ ادعا می‌کنیم که دنباله‌ای مانند $\{g_n\}$ از توابع پیوسته روی X وجود دارد به طوری که $0 \leq g_n \leq \frac{1}{3^n}$ بر X و $0 \leq f - \sum_1^n g_j \leq (\frac{1}{3})^n$ بر A . در وهله اول، فرض می‌کنیم $C = f^{-1}([\frac{1}{3}, 1])$ و $B = f^{-1}([0, \frac{1}{3}])$. اینها زیرمجموعه‌های بسته‌ای از A هستند و چون خود A بسته است، این مجموعه‌ها

در X بسته‌اند. بنابر لم اوریسون تابع پیوسته‌ای مانند $g_1 : X \rightarrow [0, \frac{1}{3}]$ وجود دارد که $g_1 = 0$ بر B و $g_1 = 1/3$ بر C ؛ از اینجا معلوم می‌شود که $0 \leq f - g_1 \leq \frac{2}{3}$ بر A . با داشتن g_1, g_2, \dots, g_{n-1} و با همان استدلال قبل می‌توانیم تابعی چون $g_n : X \rightarrow [0, \frac{2^{n-1}}{3^n}]$ بیابیم به طوری که $g_n = 0$ بر مجموعه‌ای که روی آن $f - \sum_{j=1}^{n-1} g_j \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}$ و $g_n = \frac{2^{n-1}}{3^n}$ بر مجموعه‌ای که روی آن $f - \sum_{j=1}^{n-1} g_j \geq (\frac{2}{3})^n$. فرض می‌کنیم $F = \sum_{j=1}^{\infty} g_j$. چون $\|g_n\|_{\infty} \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}$ ، مجموع‌های جزئی این سری همگرایی یکنواخت است، لذا بنابر گزاره ۴.۱۳ تابع F پیوسته است. به علاوه، روی A برای همه n ها داریم $0 \leq f - F \leq (\frac{2}{3})^n$. ■

۴.۱۷ نتیجه. اگر X نرمال باشد، $A \subset X$ بسته باشد و $f \in C(A)$ ، آنگاه تابعی چون $F \in C(X)$ وجود دارد به طوری که $F|_A = f$.

برهان. با جداگانه در نظر گرفتن قسمت‌های حقیقی و موهومی، کافی است f را تابعی حقیقی بینگاریم. فرض می‌کنیم $g = \frac{f}{1+|f|}$. در این صورت $g \in C(A, (-1, 1))$ ، لذا عضوی چون $G \in C(X, [-1, 1])$ وجود دارد که $G|_A = g$. فرض می‌کنیم $B = G^{-1}(\{-1, 1\})$. بنابر لم اوریسون تابعی چون $h \in C(X, [0, 1])$ با شرط $h = 1$ بر A و $h = 0$ بر B وجود دارد. در نتیجه $hG = G$ بر A و همه جا $|hG| < 1$ ، لذا $F = \frac{hG}{1-|hG|}$ نتیجه مطلوب را به دست می‌دهد. ■

فضای توپولوژیکی چون X کاملاً منظم نامیده می‌شود هرگاه T_1, X باشد و به ازای هر مجموعه بسته مانند $A \subset X$ و هر $x \notin A$ تابعی چون $f \in C(X, [0, 1])$ وجود داشته باشد به طوری که $f(x) = 1$ و $f = 0$ بر A . فضاهای کاملاً منظم فضاهای تیخونوف یا فضاهای $T_{\frac{3}{4}}$ نیز نامیده می‌شوند. اصطلاح اخیر برای توجیه این مطلب است که هر فضای کاملاً منظم T_4 است (اگر A, x و f همانند فوق باشند، آنگاه $f^{-1}((\frac{1}{4}, \infty))$ و $f^{-1}((-\infty, \frac{1}{4}))$ همسایگی‌های مجزایی از x و A هستند) و لم اوریسون نشان می‌دهد که هر فضای T_4 کاملاً منظم است.

تمرین‌ها

(۱۴) اگر X و Y فضاهایی توپولوژیکی باشند، آنگاه $f : X \rightarrow Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر $A \subset X$

$$f^{-1}(\overline{B}) \subset \overline{f^{-1}(B)}, \quad B \subset Y \text{ و } f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

(۱۵) اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، $A \subset X$ بسته باشد و $g \in C(A)$ طوری باشد که $g = 0$ بر ∂A ، آنگاه توسیع g به X که به ازای هر $x \in A^c$ با $g(x) = 0$ تعریف می‌شود پیوسته است.

(۱۶) فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد، Y یک فضای هاسدورف باشد و f, g نگاشت‌های پیوسته‌ای از X به Y باشند.

(الف) $\{x : f(x) = g(x)\}$ بسته است.

(ب) اگر روی زیرمجموعه چگالی از X ، $f = g$ ، آنگاه روی کل X ، $f = g$.

(۱۷) اگر X یک مجموعه \mathcal{F} گردایه‌ای از توابع حقیقی روی X و T توپولوژی ضعیف تولید شده به وسیله T باشد، آنگاه T هاسدورف است اگر و تنها اگر به ازای هر x, y از X که $x \neq y$ عضو $f \in \mathcal{F}$ وجود داشته باشد که $f(x) \neq f(y)$.

(۱۸) اگر X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند و $y_0 \in Y$ ، آنگاه X با $X \times \{y_0\}$ همیومورف است که در آن فضای اخیر به عنوان زیرمجموعه‌ای از $X \times Y$ توپولوژی نسبی دارد.

(۱۹) اگر $\{X_\alpha\}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد، آنگاه $X = \prod_\alpha X_\alpha$ (نسبت به توپولوژی حاصلضربی) با تقریب همیومورفی به طور یکتا به وسیله خاصیت زیر مشخص می‌شود: نگاشت‌های پیوسته‌ای مانند $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ وجود دارند به طوری که اگر Y فضای توپولوژیک دیگری باشد و به ازای هر α ، $f_\alpha \in C(Y, X_\alpha)$ ، آنگاه نگاشت یکتایی چون F از $C(Y, X)$ وجود دارد به طوری که $f_\alpha = \pi_\alpha \circ F$. (بنابر این حاصلضرب رسته‌ای X_α ها در رسته فضاهای توپولوژیک است.)

(۲۰) اگر A یک فضای شمارش‌پذیر باشد و به ازای هر $\alpha \in A$ ، X_α یک فضای شمارش‌پذیر اول (متناظراً دوم) باشد، آنگاه $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ شمارش‌پذیر اول (متناظراً دوم) است.

(۲۱) اگر X مجموعه‌ای نامتناهی با توپولوژی متمم متناهی باشد، آنگاه هر $f \in C(X)$ ثابت است.

(۲۲) فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد، (Y, ρ) یک فضای متریک کامل و $\{f_n\}$ دنباله‌ای در Y^X باشد به طوری که وقتی $m, n \rightarrow \infty$ ، $\sup_{x \in X} \rho(f_n(x), f_m(x)) \rightarrow 0$. تابع یکتایی مانند $f \in Y^X$ وجود دارد به طوری که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\sup_{x \in X} \rho(f_n(x), f(x)) \rightarrow 0$. چنانچه هر f_n پیوسته باشد f نیز پیوسته است.

(۲۳) برای حالتی که $X = \mathbb{R}$ برهانی مقدماتی برای قضیه توسعه تیتزه ارائه دهید.

(۲۴) فضای هاسدورفی چون X نرمال است اگر و تنها اگر X در حکم لم اوریسون صدق کند و تنها اگر X در حکم قضیه توسعه تیتزه صدق کند.

(۲۵) اگر (X, T) کاملاً منظم باشد، آنگاه T توپولوژی ضعیف تولید شده توسط $C(X)$ است.

(۲۶) فرض کنیم X و Y فضاهایی توپولوژیک باشند.

الف) اگر X همبند باشد و $f \in C(X, Y)$ ، آنگاه $f(X)$ همبند است (تمرین ۱۰ را ببینید).

ب) X همبند راهی نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر x_0 و x_1 از X تابعی چون $f \in C([0, 1], X)$ وجود داشته باشد به طوری که $f(0) = x_0$ و $f(1) = x_1$. هر فضای همبند راهی، همبند است.

ج) $X = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : t = \sin(s^{-1})\} \cup \{(0, 0)\}$ با توپولوژی نسبی القا شده از \mathbb{R}^2 را در نظر می‌گیریم. در این صورت X همبند است اما همبند راهی نیست.

(۲۷) اگر به ازای هر $\alpha \in A$ ، X_α همبند باشد (تمرین ۱۰ را ببینید)، آنگاه $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ همبند است.

$(x \in X)$ را ثابت گرفته و فرض کنید Y مؤلفه همبند x در X باشد. نشان دهید که Y شامل

$\{y \in X : \pi_\alpha(y) = \pi_\alpha(x) \text{ آنها از آنها } \alpha \text{ ها به جز تعدادی متناهی از آنها}\}$

است و مجموعه اخیر در X چگال است. تمرین‌های ۱۰ و ۱۸ را به کار ببرید.

(۲۸) فرض کنید X یک فضای توپولوژیک مجهز به یک رابطه هم‌ارزی باشد، \tilde{X} مجموعه رده‌های هم‌ارزی، $\pi : X \rightarrow \tilde{X}$

نگاشتی باشد که هر $x \in X$ را به رده هم‌ارزی شامل آن می‌برد و

$$T = \{U \subset \tilde{X} : \pi^{-1}(U) \text{ در } X \text{ باز است}\}$$

الف) T یک توپولوژی روی \tilde{X} است. (این توپولوژی، توپولوژی خارج قسمتی نامیده می‌شود.)

ب) اگر Y یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه $f : \tilde{X} \rightarrow Y$ پیوسته است اگر و تنها اگر $f \circ \pi$ پیوسته باشد.

۲۹) اگر X یک فضای توپولوژیک و G گروهی از همیومورفیسم‌های از X به خودش باشد، آنگاه G یک رابطه هم‌ارزی روی X القاء می‌کند، یعنی $y \sim x$ اگر و تنها اگر به ازای عضوی چون $g \in G$ ، $y = g(x)$ ، فرض می‌کنیم $X = \mathbb{R}^2$ ؛ فضای خارج قسمتی \bar{X} و توپولوژی خارج قسمتی روی آن (مثل تمرین ۲۸) را برای هر یک از گروه‌های زیر که از نگاشت‌های خطی وارون‌پذیر تشکیل شده‌اند توصیف کنید. به ویژه، نشان دهید که در (الف) فضای خارج قسمتی با $(0, \infty]$ همیومورف است؛ در (ب) T_1 است اما هاسدورف نیست؛ در (ج) T_0 است اما T_1 نیست و در (د) T_0 نیست. در واقع، در (د) \bar{X} شمارش‌ناپذیر است اما فقط شش مجموعه باز وجود دارد و نقاطی چون $p \in \bar{X}$ وجود دارند به طوری که $\overline{\{p\}} = \bar{X}$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{(الف)}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{(ب)}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a > 0, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{(ج)}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \right\} \quad \text{(د)}$$

۴.۳ تورها

همان‌طور که در فوق اشاره شد، همگرایی دنباله‌ای در فضاهای توپولوژیک کلی نقش اصلی را مانند آنچه در فضاهای متریک دیدیم بازی نمی‌کنند. دلیل این مدعا را می‌توان با مثال زیر توضیح داد. فضای $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ متشکل از توابع با مقادیر مختلط روی \mathbb{R} را با توپولوژی حاصلضربی (یعنی، توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه) و زیرفضای $C(\mathbb{R})$ از آن را در نظر می‌گیریم. از طرف دیگر، بنا بر نتیجه ۲.۹، اگر $\{f_n\} \subset C(\mathbb{R})$ و $f_n \rightarrow f$ نقطه به نقطه، آنگاه f اندازه‌پذیر برل است، لذا مجموعه حدود دنباله‌های همگرا در $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ زیرمجموعه‌ای سره از $C(\mathbb{R})$ است. با این وجود، $C(\mathbb{R})$ در $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ چگال است. در واقع، اگر $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ ، آنگاه مجموعه‌های

$$\left\{ g \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} : |g(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon, j = 1, \dots, n \right\}$$

$$(n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0)$$

یک پایه همسایه‌ای در f تشکیل می‌دهند و به وضوح هر یک از این مجموعه‌ها شامل توابع پیوسته هستند. البته، تعمیمی از مفهوم دنباله وجود دارد که در فضاهای توپولوژیک دل‌خواه کار می‌کند؛ ایده کلیدی، استفاده از مجموعه‌های اندیسگذار کلی‌تر از

یک مجموعه جهت‌دار مجموعه‌ای چون A مجهز به یک رابطهٔ دوتایی مانند \leq است به طوری که

- به ازای هر $\alpha \in A$ ، $\alpha \leq \alpha$ ؛
- اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$ ، آنگاه $\alpha \leq \gamma$ ؛
- به ازای هر α و β از A عضوی چون γ از A وجود دارد به طوری که $\alpha \leq \gamma$ و $\beta \leq \gamma$.

به جای $\alpha \leq \beta$ از نماد $\alpha \geq \beta$ نیز استفاده خواهیم کرد. یک تور در مجموعه‌ای چون X نگاشتی چون $\alpha \mapsto x_\alpha$ از یک مجموعه جهت‌دار مانند A بتوی X است. معمولاً اگر A معلوم باشد، چنین نگاشتی را با $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ یا فقط با (x_α) نشان می‌دهیم و می‌گوییم (x_α) با A اندیسگذاری شده است.

چند مثال از مجموعه‌های جهت‌دار عبارتند از:

(الف) مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت \mathbb{N} با شرط $k \leq j$ اگر و تنها اگر $k \leq j$.

(ب) مجموعهٔ $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ با $(a \in \mathbb{R})$ با $x \leq y$ شرط اگر و تنها اگر $|y - a| \geq |x - a|$.

(ج) مجموعهٔ همهٔ افزارهایی چون $\{x_j\}_0^n$ از بازهٔ $[a, b]$ و (y_k) یعنی، $a = x_0 < \dots < x_n = b$ با شرط

$$\max(x_j - x_{j-1}) \geq \max(y_k - y_{k-1})$$

(د) مجموعهٔ \mathcal{N} متشکل از همهٔ همسایگی‌های نقطه‌ای چون x در فضای توپولوژیکی مانند X با شرط $U \leq V$ اگر و تنها اگر $U \supset V$. (می‌گوییم \mathcal{N} با شمول عکس جهت‌دار شده است.)

(ه) حاصلضرب دکارتی $A \times B$ از دو مجموعه جهت‌دار، با شرط $(\alpha, \beta) \leq (\alpha', \beta')$ اگر و تنها اگر $\alpha \leq \alpha'$ و $\beta \leq \beta'$. (همواره این روشی است که $A \times B$ را به یک مجموعه جهت‌دار تبدیل می‌کنند.)

مثال‌های (الف) تا (ج) در آنالیز مقدماتی مطرح می‌شوند. یک تور اندیسگذاری شده با \mathbb{N} درست یک دنباله است و تورهای اندیسگذاری شده با مجموعه‌های ذکر شده در (ب) و (ج) در تعریف حدود متغیرهای حقیقی و انتگرال‌های ریمان ظاهر می‌شوند. مثال (د) در توپولوژی از اهمیت خاصی برخوردار است. چند کاربرد ساختنی در (ه) را خواهیم دید.

فرض کنیم X یک فضای توپولوژی و E زیرمجموعه‌ای از X باشد. توری چون $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ نهایتاً در E است هرگاه عضوی چون $\alpha_0 \in A$ وجود داشته باشد به طوری که برای $\alpha \geq \alpha_0$ ، $x_\alpha \in E$ و (x_α) مکرراً در E است. هرگاه به ازای هر $\alpha \in A$ عضوی چون β از A وجود داشته باشد به طوری که $x_\beta \in E$. نقطه‌ای چون x حد (x_α) است (یا (x_α) به x همگرا است، یا $x_\alpha \rightarrow x$) هرگاه به ازای هر همسایگی مانند U از x ، (x_α) نهایتاً در U باشد و x یک نقطهٔ بستاری (x_α) است هرگاه به ازای هر همسایگی مانند U از x ، (x_α) مکرراً در U باشد.

سه گزارهٔ بعد نشان می‌دهند که تورها مناسب خوبی با دنباله‌ها دارند.

۴.۱۸ گزاره. اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، $E \subset X$ و $x \in X$ ، آنگاه x یک نقطه انباشتی E است اگر و تنها اگر توری در $E \setminus \{x\}$ وجود داشته باشد به طوری که به x همگرا باشد، و $x \in E$ اگر و تنها اگر توری در E وجود داشته باشد که به x همگرا باشد.

برهان. چنانچه x یک نقطه انباشتی E باشد، فرض می‌کنیم \mathcal{N} مجموعه همسایگی‌های x باشد که با شمول عکس جهت‌دار شده است. به ازای هر $U \in \mathcal{N}$ ، نقطه‌ای چون $x_U \in (U \setminus \{x\}) \cap E$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت $x_U \rightarrow x$ ، به عکس، اگر $x_\alpha \in E \setminus \{x\}$ و $x_\alpha \rightarrow x$ ، آنگاه هر همسایگی محذوف x حاوی یکی از x_α ها است، پس x یک نقطه انباشتی E است. به همین منوال، اگر $x_\alpha \rightarrow x$ که در آن $x_\alpha \in E$ ، آنگاه $x \in \overline{E}$ و عکس گزاره از گزاره ۴.۱۸ نتیجه می‌شود. ■

۴.۱۹ گزاره. اگر X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و $f: X \rightarrow Y$ ، آنگاه f در X پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر تور همگرا به x مانند $\langle x_\alpha \rangle$ ، تور $\langle f(x_\alpha) \rangle$ به $f(x)$ همگرا باشد.

برهان. اگر f در x پیوسته باشد و V یک همسایگی از $f(x)$ باشد، آنگاه $f^{-1}(V)$ یک همسایگی از x است. بنابر این، اگر $x_\alpha \rightarrow x$ ، آنگاه $\langle x_\alpha \rangle$ نهایتاً در $f^{-1}(V)$ است، لذا $\langle f(x_\alpha) \rangle$ نهایتاً در V است و در نتیجه $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$. از طرف دیگر، اگر f در x پیوسته نباشد، آنگاه یک همسایگی مانند V از $f(x)$ وجود دارد به طوری که $f^{-1}(V)$ یک همسایگی از x نیست، یعنی $x \notin (f^{-1}(V))^\circ$ ، یا به طور معادل $x \in \overline{f^{-1}(V^c)}$. بنابر گزاره ۴.۱۸، یک تور مانند $\langle x_\alpha \rangle$ در $f^{-1}(V^c)$ وجود دارد به طوری که به x همگرا است. اما در این صورت $f(x_\alpha) \notin V$ و به همین سبب $f(x_\alpha) \not\rightarrow f(x)$. ■

یک زیرتور از توری چون $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ توری مانند $\langle y_\beta \rangle_{\beta \in B}$ به همراه نگاشتی چون $\beta \mapsto \alpha_\beta$ از B به A است به طوری که:

• به ازای هر $\alpha_0 \in A$ عضوی چون β_0 از B وجود داشته باشد به طوری که اگر $\beta \geq \beta_0$ ، آنگاه $\alpha_\beta \geq \alpha_{\beta_0}$ ؛

• $y_\beta = x_{\alpha_\beta}$.

واضح است که اگر $\langle x_\alpha \rangle$ به نقطه‌ای چون x همگرا باشد، آنگاه هر زیر تور مانند $\langle x_{\alpha_\beta} \rangle$ نیز به x همگرا است.

هشدار: نام «زیرتور» به خاطر این به کار رفته است که زیرتورها نقش همان توابعی را ایفا می‌کنند که زیر دنباله‌ها ایفا می‌کردند، اما نیایستی اینها عیناً یکی باشند زیرا نگاشت $\beta \mapsto \alpha_\beta$ لزوماً یک به یک نیست. به ویژه، مجموعه اندیسگذار B می‌تواند عدد اصلی خیلی بزرگتری از مجموعه اندیسگذار A داشته باشد و یک زیرتور از یک دنباله لزوماً یک زیر دنباله نیست.

۴.۲۰ گزاره. اگر $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ یک تور در فضای توپولوژیکی مانند X باشد، آنگاه $x \in X$ یک نقطه بستاری $\langle x_\alpha \rangle$ است اگر و تنها اگر $\langle x_\alpha \rangle$ زیرتوری داشته باشد که به x همگرا است.

برهان. اگر $\langle y_\beta \rangle = \langle x_{\alpha_\beta} \rangle$ زیرتوری همگرا به x و U یک همسایگی از x باشد، $\beta_1 \in B$ را چنان انتخاب می‌کنیم که به ازای $\beta_1 \in B$ ، $y_\beta \in U$ ، $\beta \geq \beta_1$ ، همچنین، برای عضو مفروض $\alpha \in A$ ، $\beta_2 \in B$ را طوری انتخاب می‌کنیم که برای $\alpha_\beta \geq \alpha$ ، $\beta \geq \beta_2$ در این صورت عضو $\beta \in B$ وجود دارد که $\beta \geq \beta_1$ ، $\beta \geq \beta_2$ و داریم $\alpha_\beta \geq \alpha$ و $y_\beta \in U$. بنابراین این $\langle x_\alpha \rangle$ نهایتاً در U است، لذا x یک نقطه بستاری $\langle x_\alpha \rangle$ است. بر عکس، اگر x یک نقطه بستاری $\langle x_\alpha \rangle$ باشد، فرض می‌کنیم \mathcal{N} مجموعه همسایگی‌های x باشد و $\mathcal{N} \times A$ را با تصریح $(U, \alpha) \leq (U', \alpha')$ اگر $U \supset U'$ و $\alpha \leq \alpha'$ به یک مجموعه جهت‌دار تبدیل می‌کنیم. به ازای هر $(U, \gamma) \in \mathcal{N} \times A$ می‌توانیم $\alpha_{(U, \gamma)} \in A$ را چنان انتخاب کنیم که $\alpha_{(U, \gamma)} \geq \gamma$ و $x_{\alpha_{(U, \gamma)}} \in U$. در این صورت اگر $(U', \gamma') \geq (U, \gamma)$ ، داریم $x_{\alpha_{(U', \gamma')}} \in U' \subset U$ و $\alpha_{(U', \gamma')} \geq \gamma' \geq \gamma$ که از آن معلوم می‌شود که $\langle x_{\alpha_{(U, \gamma)}} \rangle$ زیرتوری از $\langle x_\alpha \rangle$ است که به x همگرا است. ■

تمرین‌ها

۳۰ اگر A یک مجموعه جهت‌دار باشد، زیرمجموعه‌ای چون B از A در A هم‌پایان نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\alpha \in A$ عضوی چون β از B وجود داشته باشد به طوری که $\beta \geq \alpha$. نشان دهید که:

الف) اگر B در A هم‌پایان و $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ یک تور باشد، آنگاه نگاشت $B \rightarrow A$ ، $\beta \mapsto x_\beta$ را به یک زیرتور $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ تبدیل می‌کند.

ب) اگر $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ یک تور در یک فضای توپولوژیکی باشد، آنگاه $\langle x_\alpha \rangle$ به x همگرا است اگر و تنها اگر به ازای هر زیرمجموعه هم‌پایان مانند B از A ، زیرمجموعه هم‌پایانی مانند C از B وجود دارد به طوری که $\langle x_\gamma \rangle_{\gamma \in C}$ به x همگرا است.

۳۱ فرض کنیم $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ یک دنباله باشد، نشان دهید که

الف) اگر $k \mapsto n_k$ یک نگاشت از \mathbb{N} بتوی خودش باشد، آنگاه $\langle x_{n_k} \rangle_{k \in \mathbb{N}}$ زیرتوری از $\langle x_n \rangle$ است اگر و تنها اگر

وقتی $k \rightarrow \infty$ ، $n_k \rightarrow \infty$ و یک زیردنباله (مطابق تعریف بند ۰.۱) است اگر و تنها اگر n_k اکیداً صعودی باشد.

(ب) بین زیردنباله‌های و زیرتورهایی که در تمرین ۳۰ به وسیله مجموعه‌های هم پایان تعریف شد یک تناظر یک به یک طبیعی وجود دارد.

(۳۲) فضای توپولوژیکی چون X هاسدورف است اگر و تنها اگر هر تور در X حد اکثر به یک نقطه همگرا باشد. (اگر X هاسدورف نباشد، فرض کنید x و y نقاط متمایزی یا همسایگی‌های غیر مجزا باشند و مجموعه جهت‌دار $\mathcal{N}_x \times \mathcal{N}_y$ را در نظر بگیرید که در آن \mathcal{N}_x و \mathcal{N}_y خانواده‌های همسایگی‌های x و y هستند.)

(۳۳) فرض کنید $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha \in A}$ توری در یک فضای توپولوژیکی باشد و برای هر $\alpha \in A$ قرار دهید: $E_\alpha = \{x_\beta : \beta \geq \alpha\}$. در این صورت x یک نقطه بستاری $\langle x_\alpha \rangle$ است اگر و تنها اگر $x \in \bigcap_{\alpha \in A} \overline{E_\alpha}$.

(۳۴) اگر X دارای توپولوژی ضعیف تولید شده با خانواده‌ای چون \mathcal{F} از توابع باشد، آنگاه (x_α) به x همگرا است اگر و تنها اگر برای هر $f \in \mathcal{F}$ به $(f(x_n))$ همگرا باشد. (بالاخص، اگر $X = \prod_{i \in I} X_i$ ، آنگاه $x_n \rightarrow x$ اگر و تنها اگر برای هر $i \in I$ ، $\pi_i(x_n) \rightarrow \pi_i(x)$.)

(۳۵) فرض کنید X یک مجموعه و \mathcal{A} گردایه همه زیرمجموعه‌هایی از X باشد که یا شمول جهت‌دار شده است. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ را تابع دل‌خواهی بینگارید و برای هر $A \in \mathcal{A}$ فرض کنید $Z_A = \sum_{x \in A} f(x)$. در این صورت تور $\langle Z_A \rangle$ در \mathbb{R} همگرا است اگر و تنها اگر $\{x : f(x) \neq 0\}$ مجموعه شمارش‌پذیری چون $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ باشد و $\sum_1^\infty |f(x_n)| < \infty$ ، که در این حالت $Z_A \rightarrow \sum_1^\infty f(x_n)$. (به گزاره ۰.۲۰ رجوع کنید.)

(۳۶) فرض کنیم X مجموعه توابع مختلط اندازه‌پذیر لبگ روی $[0, 1]$ باشد. هیچ توپولوژی مانند \mathcal{T} روی X وجود ندارد به طوری که دنباله‌ای چون $\langle f_n \rangle$ نسبت به \mathcal{T} به f همگرا باشد اگر و تنها اگر $f_n \rightarrow f$ ت.ه. نتیجه ۳.۳۲ و قسمت‌های (ب) از تمرین‌های ۳۰ و ۳۱ را به کار بندید.)

۴.۴ فضاهای فشرده

در بند ۰.۶ سه شاخص معادل با فشردگی برای فضاهای متری ارائه دادیم: خاصیت‌هایینه برل، خاصیت بولزانو-ویراشتراس و کامل بودن همراه با کرانداری کلی. فقط دو تا از این شاخص‌ها برای فضاهای توپولوژیکی کلیه ما معنی است. اول است که

بسیار مفید واقع می‌شود. با این حساب، فضای توپولوژیکی چون X را فشرده تعریف می‌کنیم هرگاه هر پوشش باز از X زیرپوششی متناهی داشته باشد، یعنی، اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های باز باشد به طوری که $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ ،

آنگاه زیرمجموعه‌ای متناهی مانند B از A وجود داشته باشد به طوری که $X = \bigcup_{\alpha \in B} U_\alpha$.

زیرمجموعه‌ای چون Y از فضای توپولوژیکی چون X فشرده نامیده می‌شود هرگاه نسبت به توپولوژی نسبی فشرده باشد؛ بنابراین این $Y \subset X$ فشرده است اگر و تنها اگر وقتی $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های باز X با شرط $Y \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ بود، مجموعه‌ای متناهی مانند $B \subset A$ وجود داشته باشد به طوری که $Y \subset \bigcup_{\alpha \in B} U_\alpha$. علاوه بر این، Y پیش فشرده نامیده می‌شود هرگاه بستارش فشرده باشد. قوانین دمرگان به مشخص‌سازی زیرین از فشردگی بر حسب مجموعه‌های بسته منجر می‌شود. خانواده‌ای چون $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ از زیرمجموعه‌های X دارای خاصیت مقطع متناهی خوانده می‌شود هرگاه برای هر مجموعه متناهی مانند $B \subset A$ ، $\bigcap_{\alpha \in B} F_\alpha \neq \emptyset$ ،

۴.۲۱ گزاره. فضای توپولوژیکی چون X فشرده است اگر و تنها اگر برای هر خانواده مانند $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ از مجموعه‌های بسته با خاصیت مقطع متناهی، $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$ ،

برهان. فرض می‌کنیم $U_\alpha = (F_\alpha)^c$. در این صورت U_α باز است، اگر $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$ و تنها اگر $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ و $\{F_\alpha\}$ خاصیت مقطع متناهی دارد اگر و تنها اگر هیچ زیرخانواده‌ای از $\{U_\alpha\}$ فضای X را نپوشاند و حکم حاصل می‌گردد. ■

اینک چندین حکم بنیادی در باب فضاهای فشرده فهرست می‌کنیم.

۴.۲۲ گزاره. هر زیرمجموعه بسته از یک فضای فشرده، فشرده است.

برهان. اگر X فشرده باشد، $F \subset X$ بسته باشد و $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های باز واقع در X باشد به طوری که $F \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ ، آنگاه $F \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \cup \{F^c\}$ ، این پوشش بازی برای X است. این پوشش، زیرپوششی متناهی دارد، بنابراین، در صورت لزوم، با کنار گذاشتن F^c از زیرپوشش اخیر، زیرگردایه‌ای متناهی از $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ به دست می‌آوریم که F را می‌پوشاند. ■

۴.۲۳ گزاره. هرگاه F زیرمجموعه فشرده‌ای از فضای هاسدورفی چون X باشد و $x \notin F$ ، مجموعه‌های بنام مجزایی مانند U و V وجود دارند به طوری که $x \in U$ و $F \subset V$.

برهان. برای هر $y \in F$ ، مجموعه‌های باز مجزایی چون U_y و V_y انتخاب می‌کنیم که $x \in U_y$ و $y \in V_y$ ، $\{V_y\}_{y \in F}$ پوشش بازی برای F است، لذا زیرپوششی متناهی مانند $\{V_{y_j}\}_1^n$ دارد. در نتیجه $U = \bigcap_1^n U_{y_j}$ و $V = \bigcup_1^n V_{y_j}$ خواص لازم را دارند. ■

۴. ۲۴. هر زیرمجموعه فشرده از یک فضای هاسدورف، بسته است.

برهان. مطابق با گزاره ۴. ۲۳، اگر F فشرده باشد، آنگاه F^c یک همسایگی از هر یک از نقاطش است و لذا باز است. ■

یادآوری می‌کنیم که در یک فضای غیرهاسدورف، لزومی ندارد که مجموعه‌های فشرده، بسته باشند (برای مثال، هر زیرمجموعه از یک فضا با توپولوژی بدیهی، فشرده است) و لزومی هم ندارد که مقطع مجموعه‌های فشرده، فشرده باشد؛ تمرین ۳۷ را ببینید. البته بنابر گزاره‌های ۴. ۲۲ و ۴. ۲۴، در یک فضای هاسدورف، مقطع هر خانواده از مجموعه‌های فشرده، باز هم فشرده است. به علاوه، در یک فضای توپولوژیک دل‌خواه هر اجتماع متناهی از مجموعه‌های فشرده همواره فشرده است. (اگر K_1, \dots, K_n فشرده باشند و $\{U_\alpha\}$ پوشش بازی برای $\bigcup_1^n K_j$ باشد، زیرپوششی متناهی از هر K_j انتخاب کرده و آنها را ادغام می‌کنیم.)

۴. ۲۵. گزاره: هر فضای هاسدورف فشرده، نرمال است.

برهان. فرض می‌کنیم X هاسدورف فشرده باشد و E و F زیرمجموعه‌های بسته مجزایی از X باشند. بنابر گزاره ۴. ۲۳، برای هر $x \in E$ ، مجموعه‌های بسته‌ای مانند U_x و V_x وجود دارند که $x \in U_x$ و $F \subset V_x$. طبق گزاره ۴. ۲۲، E فشرده است و $\{U_x\}_{x \in E}$ پوشش بازی برای E است، لذا زیرپوششی متناهی مانند $\{U_{x_j}\}_1^n$ وجود دارد. فرض می‌کنیم $U = \bigcup_1^n U_{x_j}$ و $V = \bigcap_1^n V_{x_j}$. در این صورت U و V مجموعه‌های باز مجزایی هستند به طوری که $E \subset U$ و $F \subset V$. ■

۴. ۲۶. گزاره. اگر X فشرده و $f: X \rightarrow Y$ پیوسته باشد، آنگاه $f(X)$ فشرده است.

برهان. فرض کنیم $\{V_\alpha\}$ پوشش بازی از $f(X)$ در Y باشد. در این صورت $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ پوشش بازی از X است، لذا زیرپوششی متناهی مانند $\{f^{-1}(V_{\alpha_j})\}$ دارد و در نتیجه $\{V_{\alpha_j}\}$ پوشش بازی از $f(X)$ است. ■

۴. ۲۸ گزاره. اگر X فشرده و Y هاسدورف باشد، آنگاه هر دوسوی پیوسته مانند $f: X \rightarrow Y$ یک همیومورفیسم است.

برهان. اگر $E \subset X$ بسته باشد، آنگاه E فشرده است، بنابر این $f(E)$ فشرده می‌باشد، از این رو $f(E)$ بسته است، حال از گزاره‌های ۴. ۲۲، ۴. ۲۶ و ۴. ۲۴، معلوم می‌شود که f^{-1} پیوسته است، لذا f یک همیومورفیسم است. ■

حال نشان می‌دهیم که نوعی از خاصیت بولزانو- وایرشراس برای فضاهای توپولوژیک فشرده برقرار است. همین قدر بگوییم که فقط باید دنباله را با تورها جایگزین کنیم.

۴. ۲۹ قضیه. هرگاه X یک فضای توپولوژیک باشد، گزاره‌های زیر معادل هستند:

(الف) X فشرده است.

(ب) هر تور در X یک نقطه بستاری دارد.

(ج) هر تور در X زیرتوری همگرا دارد.

برهان. معادل بودن (ب) و (ج) از گزاره ۴. ۲۰ نشات می‌گیرد. چنانچه X فشرده باشد و $\langle x_\alpha \rangle$ توری در X باشد، فرض می‌کنیم $E_\alpha = \{x_\beta : \beta \geq \alpha\}$. چون برای هر $\alpha, \beta \in A$ عضو $\gamma \in A$ وجود دارد که $\gamma \geq \alpha$ و $\gamma \geq \beta$ ، خانواده $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ خاصیت مقطع متناهی دارد، لذا بنابر گزاره ۴. ۲۱، $\bigcap_{\alpha \in A} \bar{E}_\alpha \neq \emptyset$. اگر $x \in \bigcap_{\alpha \in A} \bar{E}_\alpha$ و U یک همسایگی از x باشد، آنگاه U هر یک از E_α ها را قطع می‌کند و این بدانمعناست که $\langle x_\alpha \rangle$ نهایتاً در U است، لذا x یک نقطه بستاری $\langle x_\alpha \rangle$ است. از سوی دیگر، اگر X فشرده نباشد، فرض می‌کنیم $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ پوشش بازی از X باشد که هیچ زیر پوشش متناهی ندارد. \mathcal{A} را گردایه زیرمجموعه‌های متناهی B می‌انگاریم که با شمول جهت‌دارشده است. و برای هر $A \in \mathcal{A}$ فرض می‌کنیم x_A نقطه‌ای در $(\bigcup_{\beta \in A} U_\beta)^c$ باشد. در این صورت $\langle x_A \rangle_{A \in \mathcal{A}}$ توری است که هیچ نقطه بستاری ندارد. در واقع، اگر $x \in X$ ، $\beta \in B$ را با خاصیت $x \in U_\beta$ انتخاب می‌کنیم. اگر $A \in \mathcal{A}$ و $A \geq \{\beta\}$ ، آنگاه $x_A \notin U_\beta$ ، لذا x یک نقطه بستاری $\langle x_\alpha \rangle$ نیست. ■

این بخش را با ذکر دو مفهوم مربوط به فشردگی به پایان می‌رسانیم. فضای توپولوژیکی چون X فشرده شمارش‌پذیر نامیده می‌شود در صورتی که هر پوشش شمارش‌پذیر از X زیرپوششی متناهی داشته باشد، و فشرده دنباله‌ای نامیده می‌شود در صورتی که هر دنباله در X زیردنباله‌ای همگرا داشته باشد. البته، هر فضای فشرده، فشرده شمارش‌پذیر است و در مورد فضاهای

متری، فشردگی و فشردگی دنباله‌ای هم ارز هستند. اما در حالت کلی، رابطه‌ای بین فشردگی و فشردگی دنباله‌ای وجود ندارد. برای احکام و مثال‌های بیشتر، تمرین‌های ۳۹ تا ۴۳ را ببینید.

تمرین‌ها

(۳۷) فرض کنیم o' نشان‌دهنده نقطه‌ای باشد که در $(-1, 1)$ نیست و $X = (-1, 1) \cup \{o'\}$. فرض کنیم T توپولوژی تولید شده با مجموعه‌های $(-1, a)$ ، $(a, 1)$ ، $\{o'\} \cup \{(-1, b) \setminus \{o'\}\}$ و $\{o'\} \cup \{(c, 1) \setminus \{o'\}\}$ روی X باشد که در آن $-1 < a < 1$ ، $-1 < b < 1$ و $0 < b < 1$ و $-1 < c < 0$. (بایستی در X ، $(-1, 1)$ را طوری پنداشت که از نقطه o به دو قسمت تقسیم شده است).

الف) $f, g: (-1, 1) \rightarrow X$ را برای همه x ها با $f(x) = x$ و برای $x \neq o$ ، $g(x) = o$ و $g(o) = o'$ تعریف کنید. در این صورت f و g همیومورفیسم‌هایی بروی بردهایشان هستند.

ب) بی‌آنکه X هاسدورف باشد T_1 است، گرچه هر نقطه از X یک همسایگی همیومورف با $(-1, 1)$ دارد (و در نتیجه این همسایگی هاسدورف است).

ج) مجموعه‌های $\{o'\} \cup \{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \setminus \{o'\}\}$ و $\{o'\} \cup \{(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \setminus \{o'\}\}$ بی‌آنکه در X بسته باشند فشرده‌اند ولی اشتراکشان فشرده نیست.

(۳۸) فرض کنیم (X, T) یک فضای هاسدورف فشرده و T' توپولوژی دیگری روی X باشد. اگر T' قوی‌تر از T باشد، آنگاه (X, T') هاسدورف است اما فشرده نیست. اگر T' اکیداً ضعیف‌تر از T باشد، آنگاه (X, T') فشرده است اما هاسدورف نیست.

(۳۹) هر فضای فشرده دنباله‌ای، فشرده شمارش‌پذیر است.

(۴۰) اگر X فشرده شمارش‌پذیر باشد، آنگاه هر دنباله در X یک نقطه بستاری دارد. اگر X شمارش‌پذیر اول هم باشد، آنگاه X فشرده دنباله‌ای است.

(۴۱) فضای T_1 ای چون X فشرده شمارش‌پذیر است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه متناهی از X یک نقطه انباشتی داشته باشد.

(۴۲) مجموعه اردینال‌های شمارش‌پذیر (بند ۰.۴ را ببینید) با توپولوژی ترتیبی (تمرین ۹) فشرده شمارش‌پذیر و شمارش‌پذیر اول است اما فشرده نیست. (برای اثبات فشردگی دنباله‌ای، از گزاره ۰.۱۹ استفاده کنید.)

۴۳) برای $x \in [0, 1]$ فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) 2^{-n}$ ($a_n(x) = 0, 1$) بسط اعشاری x در مبنای ۲ باشد. اگر x عدد گویای دودویی باشد، بسط اعشاری طوری انتخاب می‌شود که برای n های بزرگ $a_n(x) = 0$. در این صورت (a_n) در $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ هیچ زیر دنباله همگرای نقطه‌ای ندارد. (راهنمایی: $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ با توپولوژی حاصلضریبی حاصل از توپولوژی گسسته روی $\{0, 1\}$ ، فشرده دنباله‌ای نیست. در بند ۴.۶ نشان خواهیم داد که این فضای توپولوژیک فشرده است.)

۴۴) اگر X فشرده شمارش پذیر و $f : X \rightarrow Y$ پیوسته باشد، آنگاه $f(X)$ فشرده شمارش پذیر است.

۴۵) اگر X نرمال باشد، آنگاه X فشرده شمارش پذیر است اگر و تنها اگر $C(X) = BC(X)$. (تمرین های ۴۰ و ۴۴ را به کار بندید. اگر (x_n) دنباله ای در X باشد که هیچ نقطه بستاری نداشته باشد، آنگاه $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ بسته است و نتیجه ۴.۱۷ به کار می‌رود.)

۴.۵ فضاهای هاسدورف موضعا فشرده

یک فضای توپولوژیک موضعا فشرده نامیده می‌شود هرگاه هر نقطه دارای یک همسایگی فشرده باشد. با جدیت به فضاهای هاسدورف موضعا فشرده خواهیم پرداخت که برای تلیخیص آنها فضاهای LCH می‌نامیم.

۴.۳۰ گزاره. اگر X یک فضای LCH باشد، $U \subset X$ باز باشد و $x \in U$ ، آنگاه همسایگی فشرده‌ای مانند N از x وجود دارد به طوری که $N \subset \bar{U}$.

برهان. می‌توانیم فرض کنیم \bar{U} فشرده است؛ زیرا در غیر این صورت U را با $U \cap F^0$ عوض می‌کنیم که در آن F^0 همسایگی فشرده‌ای از x است. بنابر گزاره ۴.۲۳ مجموعه‌های باز (نسبی) V و W در \bar{U} وجود دارند که $x \in V$ و $\partial U \subset W$. در نتیجه V در \bar{X} باز است زیرا $V \subset U$ و \bar{V} بسته است و به همین سبب زیرمجموعه فشرده‌ای از $U \setminus W$ می‌باشد. بنابر این می‌توانیم N را مساوی با \bar{V} بگیریم. ■

۴.۳۱ گزاره. اگر X یک فضای LCH باشد و $K \subset U \subset X$ که در آن K فشرده و U باز است، آنگاه مجموعه باز

بیشتر فشرده‌ای مانند V وجود دارد به طوری که $K \subset V \subset \bar{V} \subset U$.

برهان. بنابر گزاره ۴.۳۰، برای هر $x \in K$ می‌توانیم همسایگی فشرده‌ای مانند N_x از x برگزینیم به طوری که $N_x \subset U$. در این صورت $\{N_x^\circ\}_{x \in K}$ پوشش بازی برای K است، لذا زیرپوششی متناهی مانند $\{N_{x_j}^\circ\}_1^n$ وجود دارد. فرض می‌کنیم $V = \bigcup_1^n N_{x_j}^\circ$ ؛ در این صورت $K \subset V$ و $\bar{V} \subset \bigcup_1^n N_{x_j}$ فشرده است و در U مشمول است. ■

۴.۳۲. نسخه‌ی موضعیاً فشرده‌ی لم اوریسون. اگر X یک فضای LCH باشد و $K \subset U \subset X$ که در آن K فشرده و U باز است، آنگاه تابعی چون $f \in C(X, [0, 1])$ وجود دارد به طوری که $f = 1$ بر K و خارج از زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی U از $f = 0$.

برهان. فرض کنیم V مثل گزاره ۴.۳۱ باشد. در این صورت بنابر گزاره ۴.۲۵، \bar{V} نرمال است لذا بنابر لم اوریسون (۴.۱۵)، $f \in C(\bar{V}, [0, 1])$ ای وجود دارد به طوری که $f = 1$ بر V و $f = 0$ بر ∂V . با قرار دادن $f = 0$ بر \bar{V}^c ، f را به X توسعه می‌دهیم. فرض می‌کنیم که $E \subset [0, 1]$ بسته است. اگر $E \not\subset [0, 1]$ داریم $f^{-1}(E) = (f|_{\bar{V}})^{-1}(E)$ و اگر $0 \in E$ داریم $f^{-1}(E) = (f|_{\bar{V}})^{-1}(E) \cup \bar{V}^c = (f|_{\bar{V}})^{-1}(E) \cup V^c$ زیرا $f^{-1}(E) \supset \partial V$ در هر حال $f^{-1}(E)$ بسته است، لذا f پیوسته است. ■

۴.۳۳. نتیجه. هر فضای LCH کاملاً منظم است.

۴.۳۴. قضیه‌ی توسعه‌ی تیتسه، نسخه‌ی موضعیاً فشرده. فرض کنیم X یک فضای LCH و $K \subset X$ فشرده باشد. اگر $f \in C(K)$ ، آنگاه $F \in C(X)$ ای وجود دارد به طوری که $F|_K = f$. به علاوه F را می‌توان طوری گرفت که خارج از مجموعه‌ی فشرده‌ی K صفر باشد.

برهان این قضیه شبیه به برهان قضیه ۴.۳۲ است؛ جزئیات به خواننده واگذار می‌شوند (تمرین ۴۶).

احکام قبل نشان می‌دهند که فضاهای LCH پشتوانه‌ای غنی از توابع پیوسته‌ای دارند که خارج از مجموعه‌های فشرده‌ای صفر هستند. چند اصطلاح معرفی می‌کنیم: اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و $f \in C(X)$ محمل f که آن را با $\text{supp}(f)$ نشان می‌دهیم، کوچکترین مجموعه‌ی بسته‌ای است که خارج از آن، f صفر است، یعنی، بستار مجموعه $\{x : f(x) \neq 0\}$. چنانچه $\text{supp}(f)$ فشرده باشد، می‌گوییم f محمل فشرده است، و تعریف می‌کنیم:

$$C_c(X) = \{f \in C(X) : \text{supp}(f) \text{ فشرده است}\}.$$

به علاوه، اگر $f \in C(X)$ ، می‌گوییم f در بینهایت صفر است هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ فشرده باشد و تعریف می‌کنیم:

$$C_0(X) = \{f \in C(X) : f \text{ در بینهایت صفر است}\}.$$

به وضوح $C_c(X) \subset C_0(X)$ ، به علاوه $C_0(X) \subset BC(X)$ ، زیرا برای $f \in C_0(X)$ تصویر مجموعه $\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ فشرده است و بر ممتص آن $|f| < \varepsilon$.

۴.۳۵ گزاره. هرگاه X یک فضای LCH باشد، $C_0(X)$ بستار $C_c(X)$ نسبت به متر یکنواخت است.

برهان. چنانچه $\{f_n\}$ دنباله‌ای در $C_c(X)$ باشد که به طور یکنواخت به $f \in C(X)$ همگرا باشد، برای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند n وجود دارد به طوری که $\|f_n - f\| < \varepsilon$. در نتیجه، اگر $x \notin \text{supp}(f_n)$ ، $|f(x)| < \varepsilon$ ، لذا $f \in C_0(X)$. برعکس، اگر $f \in C_0(X)$ ، آنگاه برای $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $K_n = \{x : |f(x)| \geq n^{-1}\}$. در این صورت K_n فشرده است لذا طبق قضیه ۴.۳۲ عضوی چون $g_n \in C_c(X)$ وجود دارد به طوری که $0 \leq g_n \leq 1$ و $g_n = 1$ بر K_n . فرض می‌کنیم $f_n = g_n f$. در این صورت $f_n \in C_c(X)$ و $\|f_n - f\| \leq n^{-1}$ ، بنابراین این $f_n \rightarrow f$ به طور یکنواخت. ■

اگر X یک فضای LCH غیر فشرده باشد، با افزودن یک نقطه تنها «در بینهایت» می‌توان به گونه‌ای X را به یک فضای فشرده تبدیل کرد که توابع واقع در $C_0(X)$ درست توابع پیوسته‌ای باشند که وقتی x به نقطه بینهایت نزدیک می‌شود $f(x) \rightarrow 0$. به طور دقیق‌تر، فرض می‌کنیم ∞ نشان‌دهنده نقطه‌ای باشد که در X نیست و قرار می‌دهیم $X^* = X \cup \{\infty\}$ و T را گردایه همه زیرمجموعه‌هایی از X^* می‌انگاریم که:

- (i) U زیرمجموعه بازی از X است یا
- (ii) $\infty \in U$ و U^c زیرمجموعه فشرده‌ای از X است.

۴.۳۶ گزاره. اگر X, X^* و T همانند فوق باشند، آنگاه (X^*, T) یک فضای هاسدورف فشرده است و نگاشت شمول $i : X \rightarrow X^*$ یک نشاننده می‌باشد. به علاوه، اگر $f \in C(X)$ ، آنگاه f به طور پیوسته به X^* توسعه می‌یابد اگر و تنها اگر $f = g + c$ که در آن $g \in C_0(X)$ و c یک ثابت است و در این حالت توسعه پیوسته با $f(\infty) = c$ داده می‌شود. بزبان سر راست است و به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۴۷).

فضای X^* فشرده‌سازی تک نقطه‌ای یا فشرده‌سازی الکساندروف X نامیده می‌شود.

چنانچه X یک فضای توپولوژیک باشد، فضای C^X مرکب از توابع مختلط روی X را می‌توان به روش‌های متعددی توپولوژی دار کرد. مسلماً یکی از راه‌ها توپولوژی حاصلضربی، یعنی توپولوژی همگرایی نقطه‌ای است. دیگری توپولوژی همگرایی یکنواخت است که با مجموعه‌های زیر تولید می‌شود:

$$\{g \in C^X : \sup_{x \in X} |g(x) - f(x)| < n^{-1}\} \quad (n \in \mathbb{N}, f \in C^X).$$

از برهان گزاره ۴.۱۳ معلوم می‌شود که $C(X)$ نسبت به توپولوژی همگرایی یکنواخت، زیرفضای بسته‌ای از \mathbb{C}^X است. توپولوژی مابین این دو توپولوژی، توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده است که با مجموعه‌های زیر تولید می‌شود:

$$\{g \in \mathbb{C}^X : \sup_{x \in K} |g(x) - f(x)| < n^{-1}\} \quad (n \in \mathbb{N}, f \in \mathbb{C}^X \text{ فشرده است } K \subset X)$$

اینک این توپولوژی را در حالتی به بوته آزمایش خواهیم گذاشت که X یک فضای LCH است.

۴.۳۷ لم. اگر X یک فضای LCH باشد و $E \subset X$ ، آنگاه E فقط و فقط وقتی بسته است که برای هر مجموعه فشرده مانند $K \subset X$ ، $E \cap K$ بسته باشد.

برهان. اگر E بسته باشد، آنگاه بنابر گزاره‌های ۴.۲۲ و ۴.۲۴، $E \cap K$ بسته است. چنانچه E بسته نباشد، عضوی چون $x \in \overline{E} \setminus E$ انتخاب کرده و فرض می‌کنیم K همسایگی فشرده‌ای از x باشد. در این صورت x یک نقطه انباشتگی $E \cap K$ است اما در $E \cap K$ نیست، لذا بنابر گزاره ۴.۱، $E \cap K$ بسته نیست. ■

۴.۳۸ گزاره. اگر X یک فضای LCH باشد، آنگاه $C(X)$ نسبت به توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده، زیرفضای بسته‌ای از \mathbb{C}^X است.

برهان. اگر f در بستار $C(X)$ باشد، آنگاه روی هر مجموعه فشرده مانند $K \subset X$ ، تابع f حد یکنواختی از توابع پیوسته است، لذا $f|_K$ پیوسته است. بنابر این، هرگاه $E \subset \mathbb{C}$ بسته باشد، $(f|_K)^{-1}(E) = f^{-1}(E) \cap K$ برای هر مجموعه فشرده مانند K بسته است لذا بنابر لم ۴.۳۷، $f^{-1}(E)$ بسته است. از اینجا معلوم می‌شود که f پیوسته است. ■

فضای توپولوژیکی چون X ، σ - فشرده نامیده می‌شود هرگاه اجتماع شمارش پذیری از مجموعه‌های فشرده باشد. برای درک مفهوم دو گزاره آتی، تمرین ۵۴ را ببینید.

۴.۳۹ گزاره. هرگاه X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده σ - فشرده باشد، دنباله‌ای مانند $\{U_n\}$ از مجموعه‌های باز پیش فشرده وجود دارد به طوری که برای هر n ، $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ و $X = \bigcup_1^\infty U_n$.

برهان. فرض می‌کنیم $X = \bigcup_1^\infty K_n$ که در آن هر K_n فشرده است. بنابر گزاره ۴.۳۱، هر زیرمجموعه فشرده از X همسایگی باز پیش‌فشرده‌ای دارد. بنابر این، می‌توانیم U_1 را یک همسایگی باز پیش‌فشرده از K_1 بگیریم و سپس به طور استقرایی عمل کرده و U_n را همسایگی باز پیش‌فشرده‌ای از $K_n \cup \overline{U_{n-1}}$ بگیریم. ■

۴.۴۰ گزاره. اگر X یک فضای σ -فشرده LCH باشد و $\{U_n\}$ همان باشد که در گزاره ۴.۳۹ ذکر شد، آنگاه برای هر $f \in C^X$ مجموعه‌های

$$\{g \in C^X : \sup_{x \in \overline{U_n}} |g(x) - f(x)| < m^{-1}\} \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

نسبت به توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده، یک پایه همسایه‌ای برای f تشکیل می‌دهند. بنابر این، این توپولوژی شمارش‌پذیر اول است و روی مجموعه‌های فشرده $f \rightarrow z$ به طور یکنواخت اگر و تنها اگر $f \rightarrow z$ به طور یکنواخت بر هر $\overline{U_n}$.

برهان. این احکام به آسانی از این ملاحظه نتیجه می‌شوند که اگر $K \subset X$ فشرده باشد، آنگاه $\{U_n\}_1^\infty$ پوشش بازی برای K است و از این رو به ازای n ای، $K \subset \overline{U_n}$. جزئیات به خواننده واگذار می‌شوند (تمرین ۳۸). ■

این بخش را با ساختاری به پایان می‌رسانیم که در مواقعی مفید واقع می‌شود. چنانچه X یک فضای توپولوژیک باشد و $E \subset X$ ، یک افراز واحد روی E گردایه‌ای مانند $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ مرکب از توابع واقع در $C(X, [0, 1])$ است به طوری که

• هر $x \in X$ یک همسایگی دارد به طوری که روی آن فقط تعدادی متناهی از h_α ها غیر صفرند؛

• برای $x \in E$ ، $\sum_{\alpha \in A} h_\alpha(x) = 1$ ؛

افراز واحدی چون $\{h_\alpha\}$ پیرو پوششی بازی چون U از E است هرگاه برای هر α عضوی مانند U وجود داشته باشد به طوری که $\text{supp}(h_\alpha) \subset U$.

۴.۴۱ گزاره. فرض کنیم X یک فضای LCH باشد، K زیرمجموعه‌ای فشرده‌ای از X و $\{U_r\}_1^n$ پوشش بازی از K باشد.

افراز واحدی روی K پیرو $\{U_r\}_1^n$ شامل توابع محمل فشرده وجود دارد.

برهان. بنابر گزاره ۴.۳۰، هر $x \in K$ همسایگی فشرده‌ای چون N_x دارد به طوری که به ازای z ای، $N_x \subset U_r$ چون

$\{N_x^\circ\}$ پوشش بازی از K است، نقاطی چون x_1, \dots, x_m وجود دارند به طوری که $K \subset \bigcup_1^m N_{x_p}^\circ$. فرض می‌کنیم F

اجتماع همه N_{x_j} هایی باشد که زیرمجموعه‌هایی از U_j هستند. در این صورت F_j زیرمجموعه فشرده‌ای از U_j است، لذا بنابر لم اوریسون، اعضای چون g_1, \dots, g_n از $C_c(X, [0, 1])$ وجود دارند به طوری که $g_j = 1$ بر F_j و $\text{supp}(g_j) \subset U_j$. چون F_j ها K را می‌پوشانند، روی K داریم $\sum_1^n g_k \geq 1$ ، لذا باز هم بنابر لم اوریسون، عضوی چون $f \in C_c(X, [0, 1])$ هست که $f = 1$ بر K و $\text{supp}(f) \subset \{x : \sum_1^n g_k(x) > 0\}$ ، فرض می‌کنیم $g_{n+1} = 1 - f$ ، در این صورت همه جا

$$\sum_1^{n+1} g_k(x) > 0 \quad \text{و برای } j = 1, \dots, n \text{ قرار می‌دهیم } h_j = \frac{g_j}{\sum_1^{n+1} g_k}.$$

$$\text{supp}(h_j) = \text{supp}(g_j) \subset U_j$$

و روی K داریم $\sum h_j = 1$. ■

تعمیمی از حکم فوق در تمرین ۵۷ گنجانده شده است.

تمرین‌ها

(۴۶) قضیه ۴.۲۴ را ثابت کنید.

(۴۷) گزاره ۴.۲۶ را ثابت کنید. همچنین، نشان دهید که اگر X هاسدورف باشد اما موضعاً فشرده نباشد باز هم گزاره ۴.۳۶ معتبر است مگر آنکه X^* هاسدورف نباشد.

(۴۸) برهان گزاره ۴.۴۰ را کامل کنید.

(۴۹) فرض کنید X فضای هاسدورف فشرده‌ای باشد و $E \subset X$.

(الف) اگر E باز باشد، آنگاه E نسبت به توپولوژی نسبی، موضعاً فشرده است.

(ب) اگر E در X چگال بوده و نسبت به توپولوژی نسبی موضعاً فشرده باشد، آنگاه E باز است (تمرین ۱۳ را به کار ببرید.)

(ج) E نسبت به توپولوژی نسبی موضعاً فشرده است اگر و تنها اگر E در \bar{E} باز نسبی باشد.

(۵۰) فرض کنید U زیرمجموعه‌بازی از فضای هاسدورف فشرده‌ای چون X باشد و U^* فشرده‌سازی یک نقطه‌ای آن باشد

(قسمت الف) از تمرین ۴۹ را ببینید. اگر $\phi : X \rightarrow U^*$ به صورت زیر تعریف شود، آنگاه ϕ پیوسته است:

$$\phi(x) = \begin{cases} x & x \in U \\ \infty, & x \in U^c \end{cases}$$

(۵۱) چنانچه X و Y دو فضای توپولوژیک باشند، $\phi \in C(X, Y)$ را سره گوئیم در صورتی که برای هر مجموعه فشرده مانند $K \subset Y$ ، $\phi^{-1}(K)$ در X فشرده باشد. فرض کنید X و Y دو فضای هاسدورف موضعاً فشرده، و X^* و Y^* فشرده‌سازی‌های یک نقطه‌ای آنها باشند. اگر $\phi \in C(X, Y)$ ، آنگاه ϕ سره است اگر و تنها اگر با قرار دادن $\phi(\infty_X) = \infty_Y$ ، ϕ به طور پیوسته به نگاشتی از X^* به Y^* توسیع یابد.

(۵۲) فشرده سازی یک نقطه‌ای \mathbb{R}^n با کره n -بُعدی $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ همیومورف است.

(۵۳) چنانچه فرض موضعاً فشرده‌گی X در لم ۴.۳۷ با شمارش‌پذیر اول بودن تعویض شود باز هم این لم درست باقی می‌ماند.

(۵۴) فرض کنید \mathbb{Q} دارای توپولوژی نسبی القاء شده از \mathbb{R} باشد.

(الف) \mathbb{Q} موضعاً فشرده نیست.

(ب) \mathbb{Q} ، σ -فشرده است (اجتماع شمارش‌پذیری از مجموعه‌های تک نقطه‌ای است)، اما همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های تک‌عضوی (یعنی همگرایی نقطه‌ای)، همگرایی یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشرده \mathbb{Q} را ایجاب نمی‌کند.

(۵۵) هر زیرمجموعه باز از یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده شمارش‌پذیر دوم، σ -فشرده است.

(۵۶) $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ را با $\Phi(t) = \frac{t}{t+1}$ برای $t \in [0, \infty)$ و $\Phi(\infty) = 1$ تعریف کنید.

(الف) Φ اکیداً صعودی است و $\Phi(t+s) \leq \Phi(t) + \Phi(s)$.

(ب) اگر (Y, ρ) یک فضای متریک باشد، آنگاه $\Phi \circ \rho$ متریک کراندار روی Y تعریف می‌کند که همان توپولوژی حاصل از ρ را تعریف می‌کند.

(ج) چنانچه X یک فضای توپولوژیک باشد، تابع $\rho(f, g) = \Phi(\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|)$ متریک روی \mathbb{C}^X است که توپولوژی مربوط به آن، توپولوژی همگرایی یکنواخت است.

(د) اگر X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده σ -فشرده باشد و $\{U_n\}_1^\infty$ همان دنباله‌ای باشد که در گزاره ۴.۳۹ ذکر شد، آنگاه تابع

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \Phi\left(\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|\right)$$

متری روی C^X است که توپولوژی مربوط به آن، توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده است.

(۵۷) پوشش بازی چون \mathcal{U} از یک فضای توپولوژیک مانند X ، موضعاً متناهی نامیده می‌شود هرگاه هر $x \in X$ دارای یک همسایگی باشد که فقط تعدادی متناهی از \mathcal{U} را قطع کند. چنانچه \mathcal{U} و \mathcal{V} پوشش‌های بازی از X باشند، می‌گوییم \mathcal{V} نظریفی از \mathcal{U} است در صورتی که برای هر $V \in \mathcal{V}$ عضو U از \mathcal{U} وجود داشته باشد به طوری که $V \subset U$. X پیرافشرده نامیده می‌شود هرگاه هر پوشش باز از X یک نظریف موضعاً متناهی داشته باشد.

(الف) اگر X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده σ -متناهی باشد، آنگاه X پیرافشرده است. در واقع، هر پوشش باز مانند \mathcal{U} دارای نظریف‌هایی موضعاً متناهی مانند $\{V_\alpha\}$ و $\{W_\alpha\}$ است به طوری که برای هر α ، \bar{V}_α فشرده است و $\bar{W}_\alpha \in V_\alpha$. (فرض کنید $\{U_n\}^n$ همان دنباله‌ای باشد که در گزاره ۴.۳۹ ذکر شد. برای هر n ، $\{E \cap (U_{n+1} \setminus \bar{U}_n) : E \in \mathcal{U}\}$ پوشش بازی از $U_{n+1} \setminus \bar{U}_n$ است. برای به دست آوردن $\{V_\alpha\}$ زیرپوششی متناهی از پوشش اخیر انتخاب کنید. برای به دست آوردن $\{W_\alpha\}$ از شروع برهان گزاره ۴.۴۱ تقلید کنید.)
 (ب) چنانچه X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده σ -فشرده باشد، برای هر پوشش باز مانند \mathcal{U} از X افزاز واحدی روی X پیرو \mathcal{U} و شامل توابع محمل فشرده وجود دارد.

۴.۶ قضایای فشرده‌سازی دو نقطه‌ای

چیزهای هندسی که روی آنها تحلیل انجام می‌شود (فضاهای اقلیدسی، مانیفولدها و غیره) تمایل به فشرده بودن یا فشرده موضعی بودن دارند. اما در فضاهای نامتناهی البعد از قبیل فضاهای توابع، فشردگی پدیده بسیار نادری است و وقتی به چنگ آمد باید سفت به آن چسبید. در چنین مواقعی، تقریباً همه احکام فشردگی از طریق دو قضیه اصلی به دست می‌آیند، یکی قضیه تیخونف و دیگری قضیه آرزولا - اسکولی است که آنها را در این بخش می‌آوریم.

قضیه تیخونف به حاصلضرب‌های دکارتی مربوط می‌شود. برای بیان آن نمادی را معرفی می‌کنیم. به یاد داشته باشید که عضوی چون x از $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ، به معنای دقیق کلمه، نگاشتی از A به توی $\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ است؛ یعنی، $x(\alpha) \in X_\alpha$ ، α امین مؤلفه x است که عموماً آن را با $\pi_\alpha(x)$ نشان می‌دهیم. چنانچه $B \subset A$ ، نگاشتی طبیعی مانند $\pi_B : X \rightarrow \prod_{\alpha \in B} X_\alpha$ وجود دارد؛ یعنی، $\pi_B(x)$ تحدید نگاشت x به B است. (بالاخص، $\pi_{\{\alpha\}}$ اساساً با π_α یکی است و فرقی بین آنها قائل نخواهیم شد.) اگر $p \in \prod_{\alpha \in B} X_\alpha$ و $q \in \prod_{\alpha \in C} X_\alpha$ ، خواهیم گفت که q توسیعی از p است در صورتی که q ، p را به عنوان نگاشت توسیع دهد، یعنی، هرگاه $B \subset C$ و برای $\alpha \in B$ ، $p(\alpha) = q(\alpha)$.

۴.۴۲ قضیه تیخونوف. اگر $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک فشرده باشد، آنگاه $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ (با توپولوژی حاصلضربی) فشرده است.

برهان. بنابر قضیه ۴.۲۹، کافی است نشان دهیم که هر تور مانند $(x_i)_{i \in I}$ در X یک نقطه بستاری دارد. این کار را با امتحان نقاط بستاری تورهای $(\pi_B(x_i))$ در زیر حاصلضرب‌های X انجام خواهیم داد. به عبارت دیگر، فرض می‌کنیم:

$$\mathcal{P} = \bigcup_{BCA} \{p \in \prod_{\alpha \in B} X_\alpha : \langle \pi_B(x_i) \rangle \text{ استار } p\}.$$

\mathcal{P} ناتهی است، زیرا هر X_α فشرده بوده و لذا وقتی $B = \{\alpha\}$ تور $\langle \pi_B(x_i) \rangle$ نقاط بستاری دارد. به علاوه، \mathcal{P} با توسیع جزئاً مرتب می‌شود؛ یعنی، $p \leq q$ هرگاه q توسیعی از p باشد که همانند فوق تعریف می‌شود.

فرض کنیم $\{p_l : l \in L\}$ یک زیرمجموعه مرتب خطی از \mathcal{P} باشد، که در آن $p_l \in \prod_{\alpha \in B_l} X_\alpha$. فرض می‌کنیم

$B^* = \bigcup_{l \in L} B_l$ و p^* یکتا عضو $\prod_{\alpha \in B^*} X_\alpha$ باشد که هر p_l را توسیع می‌دهد. ادعا می‌کنیم که $p^* \in \mathcal{P}$. مسلماً، از

تعریف توپولوژی حاصلضربی معلوم است که هر همسایگی از p^* شامل مجموعه‌ای به شکل $\prod_{\alpha \in B^*} U_\alpha$ است که در آن هر

U_α در X_α باز است و برای همه α ها به جز تعدادی متناهی مثل $U_\alpha = X_\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. هر یک از این α ها به B_l ای

تعلق دارد، لذا بنابر خطی بودن ترتیب، همه آنها به تک B_l ای تعلق دارند. اما در این صورت $\prod_{\alpha \in B_l} U_\alpha$ یک همسایگی از p_l

است، لذا $\langle \pi_{B_l}(x_i) \rangle$ مکرراً در $\prod_{\alpha \in B_l} U_\alpha$ است؛ از این رو $\langle \pi_{B^*}(x_i) \rangle$ مکرراً در $\prod_{\alpha \in B^*} U_\alpha$ است، لذا p^* یک نقطه

بستاری $\langle \pi_{B^*}(x_i) \rangle$ می‌باشد بنابر این p^* کران بالایی برای $\{p_l\}$ در \mathcal{P} است.

در نتیجه، بنابر لم زورن، \mathcal{P} عضو ماکسیمالی مانند $\bar{p} \in \prod_{\alpha \in \bar{B}} X_\alpha$ دارد. ادعا می‌کنیم که $\bar{B} = A$. اگر چنین نباشد،

$\gamma \in A \setminus \bar{B}$ ای انتخاب می‌کنیم. بنابر گزاره ۴.۲۰ زیرتوری مانند $\langle \pi_{\bar{B}}(x_{i(j)}) \rangle_{j \in J}$ از $\langle \pi_{\bar{B}}(x_i) \rangle$ وجود دارد که به \bar{p}

می‌گرایند و چون X_γ فشرده است زیرتوری مانند $\langle \pi_\gamma(x_{i(j(k))}) \rangle_{k \in K}$ از $\langle \pi_{\bar{B}}(x_{i(j)}) \rangle$ وجود دارد که به یک

$p_\gamma \in X_\gamma$ همگرا است. فرض می‌کنیم q یکتا عضوی از $\prod_{\alpha \in \bar{B} \cup \{\gamma\}} X_\alpha$ باشد که هر دوی \bar{p} و p_γ را توسیع می‌دهند؛ در

این صورت تور $\langle \pi_{\bar{B} \cup \{\gamma\}}(x_{i(j(k))}) \rangle_{k \in K}$ به q همگرا است و در نتیجه q یک نقطه بستاری $\langle \pi_{\bar{B} \cup \{\gamma\}}(x_i) \rangle$ است و

این ماکسیمال بودن \bar{p} را نقض می‌کند. بنابر این \bar{p} یک نقطه بستاری $\langle x_i \rangle$ است و به آنچه می‌خواستیم رسیده‌ایم. ■

حال به قضیه آرزو-اسکولی می‌پردازیم که با فشردگی در فضاهای مرکب از نگاشت‌های پیوسته ارتباط دارد. چندگونه از این حکم وجود دارند؛ قضایای زیر دو تا از کارآمدترین آنها هستند. تمرین ۶۱ را هم ببینید.

اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و $F, F \subset C(X)$ در F هر $x \in X$ همپیوسته نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک همسایگی مانند U از x وجود داشته باشد به طوری که برای هر $y \in U$ و هر $f \in F$ و $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ و F

همپیوسته نامیده می شود هرگاه در هر $x \in X$ همپیوسته باشد. همچنین، F کراندار نقطه‌ای خوانده می شود هرگاه برای هر x از X ، $\{f(x) : f \in F\}$ زیرمجموعه کرانداری از C باشد.

۴.۴۳ قضیه آرزو-اسکولی I. فرض کنیم X فضای هاسدورف فشرده‌ای باشد. اگر F زیرمجموعه کراندار نقطه‌ای همپیوسته‌ای از $C(X)$ باشد، آنگاه F نسبت به متر یکنواخت، کراندار کلی است و بستار F در $C(X)$ فشرده است.

برهان. فرض می کنیم $\varepsilon > 0$. چون F همپیوسته است، برای هر $x \in X$ همسایگی بازی چون U_x از x وجود دارد به طوری که برای هر $y \in U_x$ و هر $f \in F$ ، $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ از آنجا که X فشرده است می توانیم $x_1, \dots, x_n \in X$ را چنان انتخاب کنیم که $\bigcup_{j=1}^n U_{x_j} = X$. در این صورت بنابر کرانداری یکنواخت، $\{f(x_j) : f \in F, 1 \leq j \leq n\}$ زیرمجموعه کرانداری از C است، لذا زیرمجموعه‌ای متناهی مانند $\{z_1, \dots, z_m\}$ از C وجود دارد که $\frac{1}{4}\varepsilon$ چگال در آن است - یعنی، هر $f(x_j)$ در فاصله‌ای کمتر از $\frac{1}{4}\varepsilon$ از z_j واقع است. - فرض می کنیم $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ و $B = \{z_1, \dots, z_m\}$ ؛ در این صورت B^A مرکب از توابع از A به B متناهی است. برای هر $\phi \in B^A$ فرض می کنیم:

$$F_\phi = \{f \in F : |f(x_j) - \phi(x_j)| < \frac{1}{4}\varepsilon, 1 \leq j \leq n\}.$$

در این صورت واضح است که $\bigcup_{\phi \in B^A} F_\phi = F$ و ادعا می کنیم که هر F_ϕ قطری دارد که حداکثر ε است، لذا با انتخاب

یک f از هر F_ϕ ناتهی، می توانیم زیرمجموعه ε -چگالی از F به دست آوریم. برای اثبات ادعای فوق، فرض می کنیم

$$f, g \in F_\phi. \text{ چون روی } A, |f - \phi| < \frac{1}{4}\varepsilon \text{ و } |g - \phi| < \frac{1}{4}\varepsilon \text{ پس روی } A \text{ داریم } |f - \phi| < \frac{1}{4}\varepsilon. \text{ چنانچه } x \in X, \text{ به } x$$

ازای x می داریم $x \in U_{x_j}$ و در نتیجه

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - g(x_j)| + |g(x_j) - g(x)| < \varepsilon.$$

این رابطه نشان می دهد که F کراندار کلی است. چون بستار یک مجموعه کراندار کلی باز هم کراندار کلی است و $C(X)$ کامل است، قضیه اثبات می شود. ■

۴.۴۴ قضیه آرزو-اسکولی II. فرض کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده σ -فشرده باشد. اگر $\{f_n\}$ دنباله

کراندار نقطه‌ای همپیوسته‌ای در $C(X)$ باشد، آنگاه $f \in C(X)$ از $\{f_n\}$ وجود دارد که به طور یکنواخت بر

مجموعه‌های فشرده به f می گراید.

برهان. بنابر گزاره ۴.۳۹ دنباله‌ای چون $\{U_k\}$ از مجموعه‌های باز پیش‌فشرده وجود دارد به طوری که $\bar{U}_k \subset U_{k+1}$ و $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$. بنابر قضیه ۴.۴۳ زیردنباله‌ای مانند $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ از $\{f_n\}$ وجود دارد که روی \bar{U}_1 به طور یکنواخت کشی است؛ این زیردنباله‌ای را با $\{f_j^1\}_{j=1}^{\infty}$ نشان می‌دهیم. با روال استقرایی، برای $k \in \mathbb{N}$ می‌توانیم زیردنباله‌ای مانند $\{f_j^k\}_{j=1}^{\infty}$ از $\{f_j^{k-1}\}_{j=1}^{\infty}$ به دست آوریم که بر \bar{U}_k به طور یکنواخت کشی باشد. فرض می‌کنیم $g_k = f_k^k$ ؛ در این صورت $\{g_k\}$ از $\{f_n\}$ است که (بدون احتساب $k-1$ جمله نخست آن) زیردنباله‌ای از $\{f_j^k\}$ است و از این رو بر هر \bar{U}_k به طور یکنواخت کشی است. فرض می‌کنیم $f = \lim g_k$. در این صورت $f \in C(X)$ و بنابر گزاره‌های ۴.۳۸ و ۴.۴۰ روی مجموعه‌های فشرده به طور یکنواخت $g_k \rightarrow f$. ■

تمرین‌ها

(۵۸) اگر $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد که تعدادی نامتناهی از آنها غیر فشرده‌اند، آنگاه هر زیرمجموعه فشرده بسته از $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ هیچ‌جا چگال است.

(۵۹) حاصلضرب هر تعداد متناهی از فضاهای موضعی فشرده باز هم موضعی فشرده است.

(۶۰) حاصلضرب تعداد شمارش‌پذیری از فضاهای فشرده دنباله‌ای، فشرده دنباله‌ای است. (از همان «ترفند قطری» قضیه ۴.۴۴ استفاده کنید.)

(۶۱) قضیه ۴.۴۳ برای نگاشت‌های تعریف شده از فضای هاسدورف فشرده‌ای چون X بتوی فضای متری کاملی چون Y نیز معتبر است مشروط بر اینکه فرض کرانداری نقطه‌ای با کرانداری کلی نقطه‌ای عوض شود. (این حکم را دقیق ساخته و سپس آن را اثبات کنید.)

(۶۲) با استفاده از متر ذکر شده در قسمت (د) از تمرین ۵۶، قضیه ۴.۴۴ را به شکلی شبیه به قضیه ۴.۴۳ در آورید.

(۶۳) فرض کنیم $K \in C([0,1] \times [0,1])$. برای $f \in C([0,1])$ فرض کنید $Tf(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$. در این صورت $Tf \in C([0,1])$ و $\{Tf : \|f\|_\infty \leq 1\}$ در $C([0,1])$ پیش‌فشرده است.

۶۴) فرض کنید (X, ρ) یک فضای متریک باشد. تابعی چون $f \in C(X)$ پیوسته هولدر از نمای α ($\alpha > 0$) نامیده می‌شود هرگاه کمیت زیرمتناهی باشد:

$$N_\alpha(f) = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\rho(x, y)^\alpha}$$

اگر X فشرده باشد، آنگاه $\{f \in C(X) : \|f\|_\infty \leq 1, N_\alpha(f) \leq 1\}$ در $C(X)$ فشرده است.

۶۵) فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز از C و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع هلمولر روی U باشد. اگر $\{f_n\}$ بر زیرمجموعه‌های فشرده U به طور یکنواخت کرااندار باشد، آنگاه زیردنباله‌ای وجود دارد که روی زیرمجموعه‌های فشرده U به طور یکنواخت به تابع هلمولر f همگرا است. (برای به دست آوردن همپیوستگی فرمول انتگرالی کشی را به کار ببرید.)

۴.۷ قضیه استون - وایرستراس

در این بخش تعمیم بسیار گسترده‌ای از قضیه مشهور وایرستراس را اثبات می‌کنیم مبنی بر این که هر تابع پیوسته بر بازه فشرده‌ای چون $[a, b]$ حد یکنواخت چند جمله‌هایی روی $[a, b]$ است. در سراسر این بخش، X نشاندهنده یک فضای هاسدورف فشرده خواهد بود و $C(X)$ را به متر یکنواخت مجهز می‌کنیم.

زیرمجموعه‌ای چون \mathcal{A} از $C(X, \mathbb{R})$ یا $C(X)$ جداکننده نقاط خوانده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$ ، $f \in \mathcal{A}$ وجود داشته باشد به طوری که $f(x) \neq f(y)$. \mathcal{A} یک جبر خوانده می‌شود هرگاه یک زیرفضای برداری حقیقی (متناظراً مختلط) از $C(X, \mathbb{R})$ (متناظراً $C(X)$) باشد به طوری که اگر $f, g \in \mathcal{A}$ ، آنگاه $f, g \in \mathcal{A}$. چنانچه $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{R})$ ، یک شبکه نامیده می‌شود هرگاه $\min(f, g)$ و $\max(f, g)$ برای هر f و g از \mathcal{A} در \mathcal{A} باشند چون عملگرهای جبری و شبکه‌های پیوسته‌اند، به آسانی دیده می‌شود که اگر \mathcal{A} یک جبر یا شبکه باشد، آنگاه بستارش، یعنی $\overline{\mathcal{A}}$ نسبت به متر یکنواخت نیز چنین است.

۴.۴۵ قضیه استون - وایرستراس - فرض کنیم X فضای هاسدورف فشرده‌ای باشد. اگر \mathcal{A} زیرجبر بسته‌ای از $C(X, \mathbb{R})$ باشد که نقاط را جدا کند، آنگاه یا $\mathcal{A} = C(X, \mathbb{R})$ یا به ازای $x_0 \in X$ ، $\mathcal{A} = \{f \in C(X, \mathbb{R}) : f(x_0) = 0\}$. حالت اول فقط و فقط وقتی برقرار می‌شود که \mathcal{A} حاوی توابع ثابت باشد.

برهان نیاز به چند لم دارد. عملاً اولین لم قضیه را برای حالتی ثابت می‌کند که X حاوی دو نقطه است و دومی حالت خاصی از قضیه کلاسیک وایرستراس برای $[-1, 1]$ است. پس از این دو لم به حالت کلی برمی‌گردیم.

۴.۴۶. لم. \mathbb{R}^2 را به صورت جبری تحت جمع و ضرب مؤلفه‌ای در نظر بگیرید. در این صورت تنها زیرجبرهای \mathbb{R}^2 خود \mathbb{R}^2 ، $\{(0, 0)\}$ و پیماهای خطی $(1, 0)$ ، $(0, 1)$ و $(1, 1)$ می‌باشند.

برهان. زیرفضاهایی از \mathbb{R}^2 که در فوق فهرست شده‌اند زیرجبر هستند. اگر $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ زیرجبر غیرصفری باشد و $(a, b) \in \mathcal{A}$ ، $(0, 0) \neq (a, b)$ ، آنگاه $(a^2, b^2) \in \mathcal{A}$. اگر $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ و $a \neq b$ ، آنگاه (a, b) و (a^2, b^2) مستقل خطی هستند، لذا $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$. حالت‌های ممکن دیگر $a = 0 \neq b$ ، $a = 0 \neq b$ و $a = b \neq 0$ برای هر $(a, b) \neq (0, 0)$ از \mathcal{A} سه زیرجبر دیگر را به دست می‌دهند.

۴.۴۷. لم. برای هر $\varepsilon > 0$ یک چندجمله‌ای مانند P روی \mathbb{R} وجود دارد به طوری که $P(0) = 0$ و برای $x \in [-1, 1]$ ، $|x| < \varepsilon$.

برهان. سری ماکلورن برای $(1-t)^{1/2}$ را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} (1-t)^{1/2} &= 1 + \sum_1^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right) \left(\frac{-3}{2}\right) \dots \left(\frac{2n-3}{2}\right) \frac{t^n}{n!} \\ &= 1 - \sum_1^{\infty} c_n t^n \quad (c_n > 0). \end{aligned}$$

بنابر آزمون ریشه، این سری برای $|t| < 1$ همگرا است؛ اثبات اینکه مجموع این سری واقعاً $(1-t)^{1/2}$ است در تمرین ۶۶ گنجانده شده است. به علاوه، طبق قضیه همگرایی یکنوا (به کار رفته در مورد اندازه‌گیری شمارشی روی \mathbb{N}) داریم:

$$\sum_1^{\infty} c_n = \lim_{t \nearrow 1} \sum_1^{\infty} c_n t^n = 1 - \lim_{t \nearrow 1} (1-t)^{1/2} = 1$$

از متناهی بودن سری $\sum_1^{\infty} c_n$ معلوم می‌شود که سری $1 - \sum_1^{\infty} c_n t^n$ روی $[-1, 1]$ مطلقاً همگرای یکنواخت است و

مجموعش روی این بازه $(1-t)^{1/2}$ می‌باشد. بنابر این، اگر $\varepsilon > 0$ مفروض باشد، با اختیار مجموع جزئی مناسبی از این سری،

یک چندجمله‌ای مانند Q به دست می‌آوریم به طوری که برای $t \in [-1, 1]$ ، $|Q(t) - (1-t)^{1/2}| < \frac{1}{4}\varepsilon$. با قراردادن

$t = 1 - x^2$ و $R(x) = Q(1 - x^2)$ یک چندجمله‌ای مانند R به دست می‌آوریم به طوری که برای هر $x \in [-1, 1]$ ،

$|R(x) - (1-x^2)^{1/2}| < \frac{1}{4}\varepsilon$ ، به ویژه $|R(0) - 1| < \frac{1}{4}\varepsilon$ ، لذا اگر قرار دهیم $P(x) = R(x) - R(0)$ ، آنگاه P یک چندجمله‌ای

است به طوری که $P(0) = 0$ و برای هر $x \in [-1, 1]$ ، $|x| < \varepsilon$.

۴.۴۸ لم. اگر \mathcal{A} زیرجبر بسته‌ای از $C(X, \mathbb{R})$ باشد، آنگاه وقتی $f \in \mathcal{A}$ ، $|f| \in \mathcal{A}$ و \mathcal{A} یک شبکه است.

برهان. اگر $f \in \mathcal{A}$ و $f \neq 0$ ، فرض می‌کنیم $h = \frac{f}{\|f\|_{\infty}}$. در این صورت h فضای X را بتوی $[-1, 1]$ می‌نگارد، لذا اگر $\varepsilon > 0$ و P همان چندجمله‌ای لم ۴.۴۷ باشد، آنگاه داریم $\|h - P \circ h\|_{\infty} < \varepsilon$. چون $P(0) = 0$ ، جمله ثابتی ندارد، بنابراین $P \circ h \in \mathcal{A}$ زیرا \mathcal{A} یک جبر است. چون \mathcal{A} بسته است و ε دل‌خواه می‌باشد، داریم $h \in \mathcal{A}$ و از این رو $|h| \in \mathcal{A}$. این مطلب حکم نخست را ثابت می‌کند و دومی به دلیل زیر حاصل می‌گردد:

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad \min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|). \blacksquare$$

۴.۴۹ لم. فرض کنیم \mathcal{A} شبکه بسته‌ای در $C(X, \mathbb{R})$ باشد و $f \in C(X, \mathbb{R})$. اگر برای هر $x, y \in X$ عضوی چون $g_{xy} \in \mathcal{A}$ وجود داشته باشد به طوری که $g_{xy}(x) = f(x)$ و $g_{xy}(y) = f(y)$ ، آنگاه $f \in \mathcal{A}$.

برهان. $\varepsilon > 0$ را مفروض گرفته و برای هر $x, y \in X$ فرض می‌کنیم:

$$V_{xy} = \{z \in X : f(z) > g_{xy}(z) - \varepsilon\}, \quad U_{xy} = \{z \in X : f(z) < g_{xy}(z) + \varepsilon\}.$$

این مجموعه‌ها باز و شامل x و y هستند. y را ثابت می‌گیریم؛ در این صورت $\{U_{xy} : x \in X\}$ فضای X را می‌پوشانند، لذا زیرپوششی متناهی مانند $\{U_{y_j}\}_1^n$ وجود دارد. فرض می‌کنیم $g_y = \max\{g_{x_1 y}, \dots, g_{x_n y}\}$ ؛ در این صورت روی X ، $f < g_y + \varepsilon$ و روی $V_y = \bigcap_1^n V_{x_j y}$ که باز و شامل y است داریم $f > g_y - \varepsilon$. بنابراین این $\{V_y\}_{y \in X}$ پوشش باز دیگری برای X است، لذا زیرپوششی متناهی مانند $\{V_{x_j}\}_1^m$ وجود دارد. فرض می‌کنیم $g = \min\{g_{y_1}, \dots, g_{y_m}\}$ ؛ در این صورت $\varepsilon > \|f - g\|_{\infty}$. چون \mathcal{A} یک شبکه است داریم $g \in \mathcal{A}$ و چون \mathcal{A} بسته و ε دل‌خواه است، $f \in \mathcal{A}$. \blacksquare

برهان قضیه ۴.۴۵: $x \neq y$ را مفروض می‌گیریم و قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{A}_{xy} = \{(f(x), f(y)) : f \in \mathcal{A}\}.$$

در این صورت همانند لم ۴.۴۶، \mathcal{A}_{xy} زیرجبری از \mathbb{R}^2 است زیرا $f \mapsto (f(x), f(y))$ یک همومورفیسم جبری است. اگر برای هر $x, y \in \mathbb{R}^2$ ، آنگاه لم‌های ۴.۴۸ و ۴.۴۹ ایجاب می‌کنند که $\mathcal{A} = C(X, \mathbb{R})$. در غیر این صورت x, y ای وجود دارند به طوری که \mathcal{A}_{xy} زیرجبر سره‌ای از است.

این زیرجبر نمی‌تواند $\{(0, 0)\}$ یا پیمای خطی $(1, 1)$ باشد زیرا \mathcal{A} نقاط را جدا می‌کند، لذا بنا بر لم ۴.۴۶، \mathcal{A}_{xy} پیمای خطی $(1, 0)$ یا $(0, 1)$ است. در هر حال، $x_0 \in X$ ای وجود دارد به طوری که برای هر $f \in \mathcal{A}$ ، $f(x_0) = 0$. فقط یک x_0

وجود دارد زیرا \mathcal{A} نقاط را جدا می‌کند، لذا اگر x و y هیچکدام x_0 نباشند، داریم $\mathcal{A}_{xy} = \mathbb{R}^1$. اینک لم‌های ۴.۴۸ و ۴.۴۹ ایجاب می‌کنند که $\mathcal{A} = \{f \in C(X, \mathbb{R}) : f(x_0) = 0\}$. بالاخره، اگر \mathcal{A} شامل توابع ثابت باشد، آنگاه x_0 ای وجود ندارد که برای هر $f \in \mathcal{A}$ ، $f(x_0) = 0$ ، لذا \mathcal{A} باید با $C(X, \mathbb{R})$ برابر باشد. ■

قضیه استون-وایرستراس را به گونه‌ای مطرح کردیم که اثباتش خیلی طبیعی باشد. اما در کاربردها بعضاً به زیرجبرهایی چون \mathcal{B} از $C(X, \mathbb{R})$ برمی‌خوریم که بسته نیستند و قضیه را در مورد $\overline{\mathcal{B}}$ به کار می‌بریم. بیان مجدد حاصل از قضیه، به صورت زیر است:

۴.۵۰ نتیجه. فرض کنیم \mathcal{B} زیرجبری از $C(X, \mathbb{R})$ باشد که نقاط را جدا می‌کند. اگر $x_0 \in X$ ای وجود داشته باشد به طوری که برای هر $f \in \mathcal{B}$ ، $f(x_0) = 0$ ، آنگاه \mathcal{B} در $\{f \in C(X, \mathbb{R}) : f(x_0) = 0\}$ چگال است. در غیر این صورت \mathcal{B} در $C(X, \mathbb{R})$ چگال است.

قضیه تقریب کلاسیک وایرستراس حالت خاصی از نتیجه فوق است که در آن X زیرمجموعه فشرده‌ای از \mathbb{R}^n است و \mathcal{B} جبر چندجمله‌ای‌ها روی \mathbb{R}^n (تحدید شده به X) است؛ در اینجا \mathcal{B} حاوی توابع ثابت است، لذا نتیجه می‌گیریم که \mathcal{B} در $C(X, \mathbb{R})$ چگال است.

قضیه استون-وایرستراس به صورتی که در بالا گفته شد، برای توابع مختلط درست نیست. برای مثال، جبر چندجمله‌ای‌ها با یک متغیر مختلط در اکثر زیرمجموعه‌های فشرده K از \mathbb{C} ، در $C(X)$ چگال نیست. (بلاخص، اگر $K^\circ \neq \emptyset$ ، آنگاه هر حد یکنواخت از چند جمله‌ای‌های روی K باید با K° هارمورف باشد.) اینک برهان ساده‌ای برای این مطلب خواهیم آورد که تابع $f(z) = \bar{z}$ نمی‌تواند به طور یکنواخت با چندجمله‌ای‌های روی دایره واحد $\{e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ تقریب زده شود. اگر $P(z) = \sum_0^n a_j z^j$ ، آنگاه

$$\int_0^{2\pi} \bar{f}(e^{it}) P(e^{it}) dt = \sum_0^n a_j \int_0^{2\pi} e^{i(j+1)t} dt = 0.$$

بنابر این اگر $f(e^{it})$ و $P(e^{it})$ را به طور مخفف با f و P نشان دهیم، آنگاه با توجه به اینکه روی دایره واحد تساوی $|f| = 1$ برقرار است داریم:

$$\begin{aligned} 2\pi &= \left| \int_0^{2\pi} f \bar{f} dt \right| \leq \left| \int_0^{2\pi} (f - P) \bar{f} dt \right| + \left| \int_0^{2\pi} \bar{f} P dt \right| \\ &= \left| \int_0^{2\pi} (f - P) \bar{f} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |f - P| dt \leq 2\pi \|f - P\|_u. \end{aligned}$$

بنابراین، برای هر چندجمله‌ای مانند P ، $\|f - P\|_u \geq 1$. ■

البته، نسخهٔ مختلطی از قضیهٔ استون - وایرستراس نیز وجود دارد.

۴.۵۱ قضیهٔ استون - وایرستراس مختلط. فرض کنیم X فضای هاسدورف فشرده‌ای باشد. اگر \mathcal{A} زیرجبر مختلط بسته‌ای از $C(X)$ باشد که نقاط را جدا کند و تحت مزدوج مختلط بسته باشد، آنگاه یا $\mathcal{A} = C(X)$ یا به ازای $x_0 \in X$ ، $\mathcal{A} = \{f \in C(X) : f(x_0) = 0\}$.

برهان. چون $\operatorname{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2}$ و $\operatorname{Im} f = \frac{f - \bar{f}}{2i}$ ، مجموعهٔ $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ مرکب از بخش‌های حقیقی و موهومی توابع واقع در \mathcal{A} زیرجبری از $C(X, \mathbb{R})$ است که قضیهٔ استون - وایرستراس برای آن برقرار است. چون

$$\mathcal{A} = \{f + ig : f, g \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}\}$$

حکم مطلوب حاصل می‌گردد. ■

نوعی از قضیهٔ استون - وایرستراس هم برای فضاهای هاسدورف موضعاً فشردهٔ غیرفشرده وجود دارد. این حکم را برای توابع حقیقی می‌آوریم؛ همتای مشابه با قضیهٔ ۴.۵۱ برای توابع مختلط پی‌آمد مستقیمی از همین حکم است.

۴.۵۲ قضیه. فرض کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً فشردهٔ غیرفشرده باشد. اگر \mathcal{A} زیرجبر بسته‌ای از $C_0(X, \mathbb{R}) (= C_0(X) \cap C(X, \mathbb{R}))$ باشد که نقاط را جدا کند، آنگاه یا $\mathcal{A} = C_0(X, \mathbb{R})$ یا به ازای $x_0 \in X$ ، $\mathcal{A} = \{f \in C_0(X, \mathbb{R}) : f(x_0) = 0\}$.

برهان در قالب تمرین ۷۴ گنجانده شده است.

تمرین‌ها

۶۶ فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n$ سری ماکلورن $(1-t)^{-1}$ باشد.

(الف) سری فوق بر زیرمجموعه‌های فشردهٔ $(-1, 1)$ به‌طور یکنواخت و مطلقاً همگرا است همین‌طور سری

$-\sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1}$ که از مشتق‌گیری جمله به جمله حاصل شده است. بنابر این اگر $f(t) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n$ ، آنگاه

$$f'(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1}$$

(ب) با محاسبهٔ صریح نشان دهید که $f(t) = -2(1-t)f'(t)$. از اینجا معلوم می‌شود که $f(t) = (1-t)^{-1}$ ثابت است.

(۶۷) قضیه ۴.۵۲ را ثابت کنید. (اگر $x_0 \in X$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $f \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $f(x_0) = 0$ ، آنگاه Y را فشردده سازی یک نقطه ای $X \setminus \{x_0\}$ بگیرید؛ در غیر این صورت فرض کنید Y فشردده سازی یک نقطه ای X است. گزاره ۴.۳۶ و قضیه استون-وایرستراس را روی Y به کار ببرید.)

(۶۸) فرض کنید X و Y فضاهای هاسدورف فشردده ای باشند. نشان دهید که جبر تولید شده به وسیله توابع به شکل $f(x, y) = g(x)h(y)$ که در آن $g \in C(X)$ و $h \in C(Y)$ در $C(X, Y)$ چگال است.

(۶۹) فرض کنید A مجموعه ای ناتهی باشد و $X = [0, 1]^A$. ثابت کنید که جبر تولید شده به وسیله نگاشت های مؤلفه ای $\pi_\alpha : X \rightarrow [0, 1]$ ($\alpha \in A$) و تابع ثابت ۱ در $C(X)$ چگال است.

(۷۰) فرض کنید X فضای هاسدورف فشردده ای باشد. یک ایده آل در $C(X, \mathbb{R})$ جبری مانند J از $C(X, \mathbb{R})$ است به طوری که اگر $f \in J$ و $g \in C(X, \mathbb{R})$ آنگاه $fg \in J$.

الف) اگر J ایده آلی در $C(X, \mathbb{R})$ باشد، فرض کنید:

$$h(T) = \{x \in X : f(x) = 0 \quad \forall f \in T\}.$$

در این صورت $h(J)$ زیرمجموعه بسته ای از X موسوم به غلاف T است.

ب) اگر $E \subset X$ ، فرض کنید $k(E) = \{f \in C(X, \mathbb{R}) : \forall x \in E, f(x) = 0\}$. در این صورت $k(E)$ ایده آل

بسته ای در $C(X, \mathbb{R})$ موسوم به هسته E است.

ج) اگر $E \subset X$ ، آنگاه $h(k(E)) = \bar{E}$.

د) اگر J ایده آلی در $C(X, \mathbb{R})$ باشد، آنگاه $k(h(J)) = \bar{J}$.

(راهنمایی: می توان $k(h(J))$ را با زیرجبری از $C_0(U, \mathbb{R})$ یکی گرفت که در آن $U = X \setminus h(J)$.)

ه) زیرمجموعه های بسته X با ایده آل های بسته $C(X, \mathbb{R})$ در تناظر یک به یک قرار دارند.

(۷۱) (این نسخه ای از تمرین ۷۰ است که در آن قضیه استون-وایرستراس به کار نمی رود.) فرض کنید X فضای هاسدورف

فشردده ای باشد و M مجموعه همه همورفیسیم های جبری ناصفر از $C(X, \mathbb{R})$ به \mathbb{R} است. هر $x \in X$ عضوی چون \hat{x} از M

را با $\hat{x}(f) = f(x)$ تعریف می کند.

الف) اگر $\phi \in M$ ، آنگاه $\{f \in C(X, \mathbb{R}) : \phi(f) = 0\}$ ایده آل سره ماکسیمالی در $C(X, \mathbb{R})$ است.

ب) اگر J ایده‌آل سرهای در $C(X, \mathbb{R})$ باشد، $x_0 \in X$ ای وجود دارد به طوری که برای هر $f \in J$ ، $f(x_0) = 0$. فرض کنید چنین نباشد؛ $f \in J$ ای بسازید که همه جا $f > 0$ و نتیجه بگیرید که $1 \in J$. این کار نیاز به قضایای عمیقی ندارد.

ج) نگاشت $x \mapsto \hat{x}$ یک دوسویی از X به M است.

د) اگر M به توپولوژی همگرایی نقطه‌ای مجهز شود، آنگاه نگاشت $x \mapsto \hat{x}$ یک همیومورفیسم از X به M است. چون M صرفاً به طور جبری تعریف شده است، معلوم می‌شود که ساختار توپولوژیکی X کاملاً به وسیله ساختار جبری $C(X, \mathbb{R})$ مشخص می‌شود.

۴.۸ نشانیدن در مکعب

اینک تکنیکی برای نشانیدن فضاهای توپولوژیک در حاصلضرب‌های بازه‌ها بیان می‌کنیم و برخی کاربردهایش را مورد بحث قرار می‌دهیم. (این احکام در هیچ جای این کتاب به کار برده نخواهند شد) در سراسر این بخش بازه واحد $[0, 1]$ را با I نشان خواهیم داد و اگر A مجموعه‌ای ناتهی باشد، فضای حاصلضربی I^A را یک مکعب خواهیم نامید.

اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و $F \subset C(X, \mathbb{R})$ ، می‌گوییم F نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا می‌کند هرگاه برای هر مجموعه بسته مانند $E \subset X$ و هر $x \in E^c$ عضو مانند $f \in F$ وجود داشته باشد به طوری که $f(x) \notin \overline{f(E)}$. چنانچه F نقاط و مجموعه‌ها را جدا کند، خانواده دیگری چون $G \subset C(X, I)$ با خواص نسبتاً قوی‌تر وجود دارد: برای هر مجموعه بسته مانند $E \subset X$ و هر $x \in E^c$ عضو چون $g \in G$ وجود دارد که $g(x) = 1$ و $g = 0$ بر E (در واقع، اگر $f \in F$ در $f(x) \notin \overline{f(E)}$ صدق کند، g را چنین می‌گیریم: $g = \phi \circ f$ که در آن $\phi \in C(I, I)$ ، $\phi(f(x)) = 1$ و $\phi = 0$ بر $\overline{f(E)}$ از اینجا معلوم می‌شود که یک فضای T_1 مانند X خانواده‌ای مانند F دارد که نقاط و مجموعه‌ها را فقط و فقط وقتی جدا می‌کند که X کاملاً منتظم باشد.

هر خانواده ناتهی مانند $G \subset C(X, I)$ ، به طور طبیعی، نگاشتی چون $e: X \rightarrow I^G$ با فرمول $\pi_f(e(x)) = f(x)$ القاء می‌کند که در آن $\pi_f: I^G \rightarrow I$ نگاشت مؤلفه‌ای است. e نگاشت از X به توی مکعب I^G وابسته به F نامیده می‌شود. (عملاً این ساختار را به فضاهای مقصدی غیر از I می‌توان تعمیم داد؛ تمرین ۱۹ را ببینید.)

۴.۵۳ گزاره. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد، $F \subset C(X, I)$ و $e: X \rightarrow I^F$ نگاشت وابسته به F باشد. در این صورت

الف) e پیوسته است.

ب) اگر F نقاط را جدا کند، آنگاه e یک به یک است.

(ج) اگر T_1, X باشد و \mathcal{F} نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا کند، آنگاه e یک نشاننده است.

برهان. (الف) از گزاره ۴.۱۱ نتیجه می‌شود و (ب) واضح است. حال، ملاحظه می‌کنیم که اگر \mathcal{F} نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا کند و T_1, X باشد، آنگاه بنابر (ب) و گزاره ۴.۷ نگاشت e یک به یک است. برای اثبات پیوستگی وارون، فرض می‌کنیم که U در X باز باشد. اگر $f \in \mathcal{F}, x \in U$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $f(x) \notin \overline{f(U^c)}$ و فرض می‌کنیم:

$$V = \pi_f^{-1}[\overline{f(U^c)}]^c = \{p \in I_{\mathcal{F}} : \pi_f(p) \notin \overline{f(U^c)}\}.$$

در این صورت V در $I_{\mathcal{F}}$ باز است و $e(x) \in V \cap e(X) \subset e(U)$. بنابر این در هر $x \in U$ یک همسایگی از $e(x)$ در $e(X)$ است، لذا $e(U)$ در $e(X)$ باز است. از اینجا معلوم می‌شود که e^{-1} پیوسته است. ■

۴.۵۴. نتیجه. هر فضای هاسدورف فشرده با زیرمجموعه بسته‌ای از یک مکعب همیومورف است.

برهان. بنابر گزاره ۴.۲۵ و لم اورسون، می‌توانیم \mathcal{F} را چنین بگیریم: $\mathcal{F} = C(X, I)$.

۴.۵۵. نتیجه. یک فضای توپولوژیک کاملاً منظم است اگر و تنها اگر با زیرمجموعه‌ای از یک فضای هاسدورف فشرده همیومورف باشد.

برهان. با فرض $\mathcal{F} = C(X, I)$ ، استلزام «فقط اگر» از گزاره ۴.۵۳ به دست می‌آید؛ عکس مطلب به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۷۲). ■

یک فشرده‌سازی از فضای توپولوژیکی چون X زوجی چون (Y, ϕ) است که در آن Y یک فضای هاسدورف فشرده است و ϕ یک همیومورفسم از X به زیرمجموعه چگالی از Y می‌باشد. مکرراً X را با تصویرش $\phi(X) \subset Y$ یکی گرفته و مختصراً از «فشرده‌سازی سخن می‌گوییم». برای مثال، $([-1, 1], \tanh)$ یک فشرده‌سازی \mathbb{R} است و فشرده‌سازی یک نقطه‌ای (X^*, τ) از یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده مانند X یک فشرده‌سازی به معنی جتاری است که در آن $\tau : X \rightarrow X^*$ نگاشت شمول است.

فرض کنیم X کاملاً منظم باشد. مطابق با گزاره ۴.۵۳، اگر $\mathcal{F} \subset C(X, I)$ نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا کند، فرض کنیم $e : X \rightarrow I_{\mathcal{F}}$ نشاننده وابسته به \mathcal{F} باشد و Y بستار $e(X)$ در $I_{\mathcal{F}}$ باشد، آنگاه (Y, e) یک فشرده‌سازی از X است. این فشرده‌سازی این خاصیت را دارد که اگر X را با تصویرش $e(X)$ یکی بگیریم، آنگاه هر $f \in \mathcal{F}$ توسعه پیوسته‌ای به Y دارد که یکتا است زیرا X در Y چگال است. در واقع، یکی گرفتن X با $e(X)$ ، f را به نگاشت $\pi_f|_{e(X)}$ مبدل می‌سازد، که به $\pi_f|_{e(X)}$ توسعه می‌یابد. به علاوه، اگر $\pi_f|_{e(X)}$ توسعه‌پذیر باشد، X را به طور پیوسته به Y توسعه می‌یابد، آنگاه

به وضوح $f + g$ و fg نیز به طور پیوسته توسیع خواهند یافت و اگر $\{f_n\}$ دنباله همگرای یکنواختی از توابع روی X باشد که به طور پیوسته به Y توسیع یابند، توسیع هایشان به طور یکنواخت بر Y همگرا هستند زیرا X در Y چگال است، لذا $f = \lim f_n$ نیز به طور پیوسته به Y توسیع می یابد، ثابت کرده ایم که:

۴.۵۶ گزاره. فرض کنیم $F \subset C(X, I)$ نقاط و مجموعه های بسته را جدا کند. (Y, e) را فشرده سازی وابسته به F می انگاریم و فرض می کنیم \mathcal{A} کوچکترین زیر جبر بسته ای از $BC(X)$ باشد که حاوی F است. در این صورت $f \in \mathcal{A}$ توسیع پیوسته ای به Y دارد.

این حکم معکوس دارد: تمرین ۷۳ را ببینید.

اگر X یک فضای کاملاً منظم باشد، فشرده سازی وابسته به $F = C(X, I)$ فشرده سازی استون - چخ X نامیده می شود و با $(\beta X, e)$ یا وقتی X را با $e(X)$ یکی بگیریم خلاصه وار با βX نشان داده می شود. هر $f \in BC(X)$ به طور پیوسته به βX توسیع می یابد؛ در واقع حکم بسیار کلی تری برقرار است:

۴.۵۷ قضیه. اگر X یک فضای کاملاً منظم، Y فضای هاسدورف موضعاً فشرده ای باشد و $\phi \in C(X, Y)$ ، آنگاه ϕ توسیع پیوسته یکتایی مانند $\tilde{\phi}$ به βX دارد - یعنی، نگاشت یکتایی چون $\tilde{\phi} \in C(\beta X, Y)$ وجود دارد به طوری که $\tilde{\phi} \circ e = \phi$. اگر (Y, ϕ) یک فشرده سازی از X باشد، آنگاه $\tilde{\phi}$ پوشا است؛ چنانچه هر $f \in BC(X)$ نیز به طور پیوسته به Y توسیع یابد (یعنی، به ازای عضوی چون $g \in C(Y)$ ، $f = g \circ \phi$)، آنگاه $\tilde{\phi}$ یک همیومورفیسم است.

برهان. فرض می کنیم $F \in C(X, I)$ و $G = C(Y, I)$ و $(\beta Y, i)$ فشرده سازی استون - چخ Y باشد (یعنی، $i: Y \rightarrow I^G$ نشاننده وابسته به G باشد و $\beta Y; \beta Y = i(Y)$ با Y همیومورف است زیرا Y فشرده است). $\phi \in C(X, Y)$ را مفروض گرفته و $\Phi: I^F \rightarrow I^G$ را با $\Phi(p) = \pi_{g \circ \phi}(p)$ تعریف می کنیم. بنا بر گزاره ۴.۱۱، نگاشت Φ پیوسته است و

$$\pi_g(\Phi(e(x))) = \pi_{g \circ \phi}(e(x)) = g(\phi(x)) = \pi_g(i(\phi(x))),$$

یعنی، $\Phi \circ e = i \circ \phi$ ، از اینجا معلوم می شود که $\Phi(e(X)) = i(\phi(X)) \subset \beta Y$ و از این رو

$$\Phi(\beta X) \subset \overline{\beta Y} = \beta Y$$

مطالب گفته شده در دیاگرام جابه جایی زیر خلاصه می شود:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{e} & \beta X & \hookrightarrow & I^{\mathbb{F}} \\ \phi \downarrow & & \Phi|_{\beta X} \downarrow & & \Phi \downarrow \\ Y & \xrightarrow{i} & \beta Y & \hookrightarrow & I^{\mathbb{G}} \end{array}$$

فرض می‌کنیم $\tilde{\phi} = i^{-1} \circ (\Phi|_{\beta X})$. در این صورت $\tilde{\phi} \circ e = i^{-1} \circ \Phi \circ e = \phi$ و یکتایی $\tilde{\phi}$ واضح است زیرا $e(X)$ در βX چگال است؛ بنابراین این حکم نخست ثابت شده است. اگر (Y, ϕ) یک فشردسازی از X باشد، آنگاه $\phi(X)$ در Y چگال است؛ اما در این صورت $\tilde{\phi}(\beta X)$ در Y چگال است و فشرد هم می‌باشد، لذا $\tilde{\phi}(\beta X) = Y$. بالاخره، اگر هر $f \in BC(X)$ به ازای عضوی مانند g از $C(Y)$ به شکل $g \circ \phi$ باشد، آنگاه Φ یک به یک است؛ در نتیجه $\tilde{\phi}$ یک به یک است و از این رو بنابر گزاره ۴.۲۸ یک همیومورفیسم می‌باشد. ■

از این قضیه معلوم می‌شود که βX «بزرگترین» فشردسازی فضای کاملاً منظمی چون X است، به این معنی که هر فشردسازی دیگر تصویر پیوسته‌ای از آن است. در آن سوی قضیه، اگر X موضعاً فشرد باشد، آنگاه بنابر لم اوریسون، $F = C_c(X) \cap C(X, I)$ نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا می‌کند. نگاهی به ساختمان فشردسازی (Y, e) وابسته به همین نشان می‌دهد که Y حاوی $e(X)$ و نقطه‌تهایی از $I^{\mathbb{F}}$ است که همه مؤلفه‌هایش صفر هستند. در نتیجه به آسانی معلوم می‌شود که Y با فشردسازی یک نقطه‌ای X که در بند ۴.۵ ساخته شد همیومورف است.

به‌عنوان آخرین کاربرد نشاننده $e: X \rightarrow I^{\mathbb{F}}$ ، به سوال زیر پاسخی جزئی می‌دهیم:

کی یک فضای توپولوژیک مترپذیر است، یعنی، چه وقت توپولوژی یک فضای توپولوژیک با یک متر تعریف می‌شود؟ یک شرط لازم برای آنکه X مترپذیر باشد این است که نرمال باشد (تمرین ۳). از سوی دیگر:

۴.۵۸ قضیه متری سازی اوریسون. هر فضای نرمال شمارش پذیر دوم، مترپذیر است.

چون هر زیرمجموعه یک فضای مترپذیر، (با همان متر) مترپذیر است، قضیه فوق پی‌آمد مستقیمی از گزاره ۴.۵۳ و دو حقیقت زیر است که اثبات‌هایشان در قالب تمرین‌های ۷۶ و ۷۷ گنجانده شده است:

- اگر X نرمال و شمارش پذیر دوم باشد، آنگاه خانواده شمارش پذیری مانند $F \subset C(X, I)$ وجود دارد که نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا می‌کند.
- اگر F شمارش پذیر باشد، آنگاه $I^{\mathbb{F}}$ مترپذیر است.

(۷۲) هر زیرمجموعه از یک فضای کاملاً منظم، نسبت به توپولوژی نسبی، کاملاً منظم است.

(۷۳) اگر X یک فضای کاملاً منظم باشد، زیرجبری چون \mathcal{A} از $BC(X)$ کاملاً منظم نامیده می‌شود هرگاه: (i) بسته و حاوی توابع ثابت باشد و (ii) $\mathcal{A} \cap C(X, I)$ نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا کند.

(الف) هرگاه (Y, e) یک فشرده‌سازی هاسدورف از X باشد، $\mathcal{A}_Y = \{f \circ e : f \in C(Y)\}$ زیرجبر کاملاً منظمی از $BC(X)$ است.

(ب) چنانچه (Y, e) و (Y', e') فشرده‌سازی‌های هاسدورفی از X باشند به طوری که $\mathcal{A}_Y = \mathcal{A}_{Y'}$ ، یک همیومورفیسم مانند $\phi : Y \rightarrow Y'$ وجود دارد به طوری که $\phi \circ e = e'$. (از برهان قضیه ۴.۵۷ تقلید کنید که با حالت $Y = \beta X$ در ارتباط است.)

(ج) اگر (Y, e) فشرده‌سازی X وابسته به $F \subset C(X, I)$ باشد، آنگاه \mathcal{A}_Y کوچکترین زیرجبری از $BC(X)$ است که شامل F است. (تمرین ۶۹ را به کار ببرید.)

(د) فشرده‌سازی‌های هاسدورف X در تناظر یک به یک با زیرجبرهای کاملاً منظم $BC(X)$ قرار دارند.

(۷۴) N (با توپولوژی گسسته) را به عنوان زیرمجموعه‌ای از فشرده‌سازی استون - چخ آن، یعنی βN در نظر بگیرید.

(الف) اگر A و B زیرمجموعه‌های مجزایی از N باشند، بستارهایشان در βN مجزا هستند. (راهنمایی: $(\chi_A \in C(N, I))$.)
(ب) هیچ دنباله‌ی واقع در N در βN همگرا نیست مگر آنکه نهایتاً ثابت باشد (لذا βN قطعاً فشرده‌ی دنباله‌ای نیست.)

(۷۵) فرض کنید X یک فضای کاملاً منظم باشد. مجموعه M مرکب از همیومورفیسم‌های جبری از $BC(X, \mathbb{R})$ به \mathbb{R} تجهیز شده با توپولوژی همگرایی نقطه‌ای با βX همیومورف است. (تمرین ۷۱ را ببینید. از دیدگاه نظریه جبر باناخ، این کارآمدی βX ذاتی است.)

(۷۶) اگر X نرمال و شمارش‌پذیر دوم باشد، خانواده شمارش‌پذیری مانند $F \subset C(X, I)$ وجود دارد که نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا می‌کند. (فرض کنید \mathcal{B} پایه شمارش‌پذیری برای توپولوژی باشد. مجموعه زوج‌هایی چون $(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ را در نظر بگیرید که $\bar{U} \subset V$ و لم اوریسون را به کار ببرید.)

(۷۷) فرض کنید $\{(X_n, \rho_n)\}_{n=1}^{\infty}$ خانواده شمارش‌پذیری از فضاهای متریک باشد که مترهایشان مقادیر واقع در $[0, 1]$ را اختیار می‌کنند. (محدودیت اخیر همواره می‌تواند ایجاد شود؛ قسمت (ب) از تمرین ۵۶ را بنگرید.) فرض کنید $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. اگر

$x, y \in X$ ، مثلاً $x = (x_1, x_2, \dots)$ و $y = (y_1, y_2, \dots)$ ، تعریف کنید: $\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(x_n, y_n)$ در این صورت ρ یک متر است که توپولوژی حاصلضربی روی X را تعریف می‌کند.

۴.۹ یادداشت‌ها و مراجع

منشأ مفهوم فضای توپولوژیک در سخنرانی ریمان [۱۱۳] درباره پایه‌های هندسه که در ۱۸۵۴ ایراد شد به روشنی آمده است، اما نیم قرن بعد از آن گذشت تا جهان ریاضی در آستانه در نظر گرفتن فضاهای مجرد به شیوه‌ای قانونمند قرار گرفت. اولین گام برای ساختن قالبی مجرد برای مطالعه حدها و پیوستگی در سال ۱۹۰۶ توسط فرشه برداشته شد، وی فضاهای متری و همینطور رده کلی تری از فضاهای شبه توپولوژیک را معرفی کرد که خواصشان بر حسب همگرایی دنباله‌ای تعریف شدند. چند سال بعد، هاسدورف [۶۸] نقشه اصول موضوع برای همسایگی‌هایی از نقاط را داد که به فضای هاسدورف رسید، اهمیت دیدگاه وی به سرعت آشکار شد و پایه سایر اکتشافات موضوع شد.

چندین کتاب خوب وجود دارد که خواننده می‌تواند برای موارد جامع توپولوژی مجموعه نقاط به آنها مراجعه کند، این مراجع عبارتند از: بور باکی [۲۰]، دوگانجی [۳۴]، انگل کینینگ [۳۸]، کلی [۸۳] و ناگاتا [۱۰۲]. انگل کینینگ مراجع و یادداشت‌های تاریخی زیادی دارد.

بند ۴.۲: لم اوریسون و قضیه توسیع تیتسه هر دو ابتدا در اورسیون [۱۵۲] اثبات شدند. حالت‌های خاص قضیه اخیر قبل از اینها توسط چند نویسنده به دست آمده بودند، (از آن جمله تیتسه [۱۵۲] را ببینید). مثال‌هایی از فضاهای کاملاً منظم که نرمال نیستند و فضاهای منظمی که کاملاً منظم نیستند و همه آنها بسیار پیچیده هستند نخستین بار توسط تیخونف [۱۵۲] ساخته شدند. مطلب قابل توجه، وجود فضای منظمی است که هیچ تابع پیوسته غیر ثابت ندارد و این حکم به هویت [۷۳] نسبت داده شده است. مثال‌هایی نیز در کتاب‌های ذکر شده فوق می‌توان یافت.

بند ۴.۳: گاهی از اوقات نظریه تورها نظریه مور-اسمیت همگرایی نامیده می‌شود [۱۰۱]. نظریه همگرایی کلی دیگری که توسط اچ. کارتان ابداع شده و به وسیله بورباکی به چاپ رسید، بر مفهوم فیلترها استوار است. یک فیلتر در مجموعه‌ای چون X ، خانواده‌ای مانند $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ با خواص زیر است:

- اگر $f \in \mathcal{P}$ و $E \supset F$ ، آنگاه $E \in \mathcal{F}$.
- اگر $E \in \mathcal{F}$ و $F \in \mathcal{F}$ ، آنگاه $E \cap F \in \mathcal{F}$.
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

چنانچه X یک فضای توپولوژیک باشد، فیلتری چون \mathcal{F} در X همگرا به $x \in X$ است هرگاه هر همسایگی از x به \mathcal{F} تعلق داشته باشد. فیلترها و تورها به صورت زیر به هم مربوط می‌شوند. اگر $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ توری در X باشد، فیلتر مشتق آن گردایه همه مجموعه‌هایی چون $E \subset X$ است به طوری که (x_α) نهایتاً در E باشد. از سوی دیگر، اگر \mathcal{F} یک فیلتر باشد، آنگاه \mathcal{F} تحت

شمول عکس، یک مجموعه جهت‌دار است، و توری چون $\langle x_F \rangle_{F \in \mathcal{F}}$ که با \mathcal{F} اندیسگذاری شده است مربوط به \mathcal{F} خوانده می‌شود هر گاه برای هر $F \in \mathcal{F}$ ، $x_F \in F$. سپس به آسانی معلوم می‌شود که تور $\langle x_\alpha \rangle$ به \mathcal{X} همگرا است اگر و تنها اگر فیلتر مشتق آن به \mathcal{X} همگرا باشد و فیلتری چون \mathcal{F} همگرا به \mathcal{X} است اگر و تنها اگر همه تورهای مربوط به آن به \mathcal{X} همگرا باشند. برای کسب اطلاعات بیشتر، بورباکی [۲۰] و دوگانچی [۲۴] را ببینید.

بند ۴.۴: به کار بردن واژه «فشرده» کاملاً متعارف نیست. در برخی از کارهای قدیمی، واژه «فشرده» و «فشرده دوتایی» به ترتیب به معانی فشرده شمارش‌پذیر و فشرده به کار رفته‌اند و برخی از مؤلفین «فشرده» و «شبه فشرده» را به ترتیب به معانی فشرده هاسدورفی و فشرده به کار برده‌اند. مترادف‌هایی برای «پیش فشرده» که در نوشته‌ها به وفور یافت می‌شوند عبارتند از: «فشرده مشروط» و «فشرده نسبی»، آخری رواج دارد زیرا به فشردگی با-توپولوژی نسبی اشاره دارد که تفاوت آن کاملاً محسوس است.

بند ۴.۶: در مقاله تیخونوف [۱۵۱] فشردگی $^A[0,1]$ برای هر مجموعه مانند A را ثابت شده است، تلفیق این حکم با نتیجه ۴.۵۴ که در همان مقاله است، به آسانی ایجاب می‌کنند که هر حاصلضرب از فضاهای هاسدورف فشرده، فشرده باشد. قضیه تیخونوف کلی به چخ [۲۳] نسبت داده شده است.

برهانی که ما آورده‌ایم مشابه ولی بسیار قشنگ‌تر از قدیمی‌ها است و آن را به چرنف [۲۴] نسبت داده‌اند. اصل انتخاب، معمولاً در قالب لم زورن، جزء اساسی برهان‌های قضیه تیخونوف است. حقیقت جالب توجهی که توسط کلی [۸۲] کشف شد این است که قضیه تیخونوف به نوبه خود اصل انتخاب را ایجاب می‌کند. اینک برهان این مطلب را می‌آوریم:

فرض می‌کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های ناتهی باشد. نقطه‌ای چون w که به هیچ کدام از X_α ها تعلق ندارد انتخاب می‌کنیم، قرار می‌دهیم $X_\alpha^* = X_\alpha \cup \{w\}$ و با قید اینکه \emptyset و X_α و $\{w\}$ مجموعه‌های باز باشند یک توپولوژی روی X_α^* تعریف می‌کنیم. از قرار معلوم X_α^* فشرده است، لذا قضیه تیخونوف ایجاب می‌کند که $X^* = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha^*$ فشرده باشد. فرض می‌کنیم $F_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha)$. مجموعه‌های F_α بسته‌اند و بنا بر اصل انتخاب برای گردایه‌های متناهی از مجموعه‌ها — که به کمک سایر اصول متعارف نظریه مجموعه‌ها قابل اثبات است — این مجموعه‌ها خاصیت مقطع متناهی دارند. در واقع، اگر مجموعه‌ای متناهی مانند $B \subset A$ مفروض باشد، برای $\beta \in B$ ، $x_\beta \in X_\beta$ را انتخاب می‌کنیم؛ در این صورت $\bigcap_{\beta \in B} F_\beta$ شامل نقطه‌ای چون $x \in X$ است به طوری که برای $\beta \in B$ ، $\pi_\beta(x) = x_\beta$ و برای $\alpha \notin B$ ، $\pi_\alpha(x) = w$. بنا بر گزاره ۴.۲۱، $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ که دقیقاً $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ است ناتهی می‌باشد. با تفصیل این استدلال، می‌توان اصل انتخاب را از این حالت خاص قضیه تیخونوف استخراج کرد که: اگر X فشرده باشد، آنگاه برای هر A فضای X^A فشرده است؛ مقاله وارد [۱۵۶] را ببیند. احکام اولیه آرزلا و اسکولی برای توابع روی \mathbb{R} تعبیه شده بودند؛ آرزلا [۶] را ببینید. گونه‌های دیگری از قضیه آرزلا - اسکولی مربوط به فشردگی زیرمجموعه‌های $C(X, Y)$ تحت مفروضات مختلف روی X و Y را می‌توان در کتاب‌های یادشده فوق و در www.pnu-club.com یافت.

بند ۴.۷: قضیه استون - وایرستراس نخستین بار در لابلای مقاله طویل و مشکل استون [۱۴۴] ظاهر شده است. بعداً استون [۱۴۵] صورت بسیار خلاصه شده‌ای از قضیه و برخی کاربردهایش را نوشت که هنوز هم خواندنی خوبی به شمار می‌رود. بند ۴.۸: تاریخ این مبحث با اوریسون [۱۵۳] شروع می‌شود، در [۱۵۳] قضیه متری‌سازی اساساً به روشی اثبات شده است که ما آورده‌ایم. تکنیک نشان دادن فضاها در مکعب در همین مقاله به‌طور ضمنی گفته شده است، اما نخستین بار به‌طور صریح در تیخونوف [۱۵۱] آمده است. فشردده‌سازی استون - چخ، به نوعی در مقاله اخیر به‌طور ضمنی گفته شده است، اما نخستین بار به‌طور صریح در استون [۱۴۴] و چخ [۲۳] توصیف شد و مورد مطالعه قرار گرفت.

نشان دادن این مطلب مشکل نیست که هر فضای منظم و شمارش‌پذیر دوم، نرمال است (لم ۴.۱ از کلی [۸۲] را ببینید): در نتیجه، فرض نرمال بودن در قضیه متری‌سازی اوریسون را می‌توان با منظم بودن عوض کرد. شرط لازم و کافی برای مترپذیری یک فضای توپولوژیک دل‌خواه شناخته شده است، اما قابلیت بررسی مثل شرایط قضیه اوریسون را ندارد. کتاب‌های ذکر شده در فوق را ببینید.

متأسفانه واژه «فشردده‌سازی» به معنی نگاشت یک به یک پیوسته‌ای مانند $\phi: X \rightarrow Y$ از یک فضای توپولوژیک X بروی زیرمجموعه چگالی از یک فضای فشردده مانند Y به‌کار رفته است بدون آنکه قید شود ϕ یک نشاننده است. چنین «فشردده‌سازی» از زیرجبرهای $C(X)$ برگرفته شده است که نقاط را جدا می‌کنند اما به معنی ذکر شده در تمرین ۷۳ کاملاً منظم نیستند. مثالی به وسیله جبر توابع «متناوب تقریباً یکنواخت» روی \mathbb{R} مهیا می‌شود. این جبر توسط توابع $f_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) تولید می‌شود؛ «فشردده‌سازی» مربوطه \mathbb{R} به فشردده‌سازی بوهر مشهور است؛ فولند [بند ۴.۷ و ۴۷] را ببینید.

فصل پنجم مقدمات آنالیز تابعی

«آنالیز تابعی» نامی رایج برای مطالعه فضاهای برداری با بعد نامتناهی روی \mathbb{R} یا \mathbb{C} و نگاشت‌های خطی بین آنها است. آنچه موجب تمایز آنالیز تابعی با جبر خطی محض می‌شود اهمیت ملاحظات توپولوژیکی است. روی فضاهای برداری با بعد متناهی فقط یک توپولوژی معقول وجود دارد و نگاشت‌ها خود به خود نسبت به این توپولوژی پیوسته‌اند. اما در ابعاد نامتناهی موضوع چندان ساده نیست. (همان‌طور که قبلاً دیده‌ایم، چنانچه $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع بر \mathbb{R} باشد، جمله « $f_n \rightarrow f$ » معانی متعددی دارد.) چون هدفمان در این فصل صرفاً ارائه مقدمات مختصری در این باب است — به جز در بند ۵.۴ — در سایر موارد توجه خود را به توپولوژی‌هایی معطوف می‌کنیم که به وسیله نرم‌ها روی فضاهای برداری تعریف می‌شوند.

۵.۱ فضاهای برداری نرم‌دار

فرض کنیم K یکی از دو میدان \mathbb{R} یا \mathbb{C} و X یک فضای برداری روی K باشد. عضو صفر X را با 0 نشان می‌دهیم. تمایز آن با اسکالر $0 \in K$ از متن مشخص می‌شود. همواره یک زیرفضا به معنی یک زیرفضای برداری خواهد بود. چنانچه $x \in X$ ، زیرفضای یک بعدی پدید آمده توسط x را با Kx نشان می‌دهیم. همچنین، اگر M و N زیرفضاهایی از X باشند، مجموعه $\{x + y : x \in M, y \in N\}$ را با $M + N$ نشان می‌دهیم.

یک نیم‌نرم روی X تابعی چون $\|x\| \rightarrow x$ از X به $[0, \infty)$ است به طوری که

- به ازای هر $x, y \in X$ ، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلثی)،

- به ازای هر $x \in X$ و هر $\lambda \in K$ ، $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ؛

به وضوح خاصیت دوم ایجاب می‌کند که $\|0\| = 0$. نیم نرمی که در آن $\|x\| = 0$ فقط وقتی برقرار باشد که $x = 0$ ، یک نرم نامیده می‌شود و هر فضای برداری مجهز به یک نرم، یک فضای برداری نرم‌دار (یا فضای خطی نرم‌دار) نامیده می‌شود.

اگر X یک فضای برداری نرم‌دار باشد، تابع $\rho(x, y) = \|x - y\|$ یک متر روی X تعریف می‌کند، زیرا

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|,$$

$$\|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = \|y - x\|.$$

توپولوژی تعریف شده توسط این متر، توپولوژی نرمی روی X نامیده می‌شود. دو نرم مانند $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ روی X هم‌ارز نامیده می‌شوند هرگاه ثابت‌هایی چون $C_1, C_2 > 0$ وجود داشته باشند به طوری که

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \quad (x \in X).$$

نرم‌های هم‌ارز مترهای هم‌ارزی تعریف می‌کنند و از این رو توپولوژی‌های یکسان و دنباله‌های کشی یکسانی تعریف می‌کنند. هر فضای برداری نرم‌دار مانند X که نسبت به متر نرمی کامل باشد یک فضای باناخ نامیده می‌شود. (هر فضای نرم‌داری را می‌توان در یک فضای باناخ به صورت یک زیرمجموعه چگال نشان داد). یکی از راه‌های انجام این کار تقلید از ساختن \mathbb{R} از \mathbb{Q} به کمک دنباله‌های کشی است؛ در بند ۵.۲ راه ساده‌تری ارائه خواهیم داد) قضیه زیر محک مفیدی برای کامل بودن یک فضای برداری نرم‌دار است. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد، سری $\sum_1^\infty x_n$ همگرا نامیده می‌شود هرگاه وقتی

$$\sum_1^N x_n \rightarrow x, N \rightarrow \infty \text{ و مطلقاً همگرا نامیده می‌شود هرگاه } \sum_1^\infty \|x_n\| < \infty$$

۵.۱) قضیه. فضای متری نرم‌داری چون X کامل است اگر و تنها اگر هر سری مطلقاً همگرا در X همگرا باشد.

برهان. اگر X کامل باشد و $\sum_1^\infty \|x_n\| < \infty$ ، قرار می‌دهیم $S_N = \sum_1^N x_n$. در این صورت به ازای $N > M$

داریم:

$$\|S_N - S_M\| \leq \sum_{M+1}^N \|x_n\|.$$

وقتی $\sum_{M+1}^N \|x_n\| \rightarrow 0, M, N \rightarrow \infty$. بنابر این دنباله $\{S_N\}$ کشی و در نتیجه همگرا است. به عکس، فرض می‌کنیم

هر سری مطلقاً همگرا، همگرا باشد و $\{x_n\}$ دنباله‌ای کشی باشد. می‌توان $n_1 < n_2 < \dots$ را چنان انتخاب کرد که به ازای

$\|x_n - x_m\| < 2^{-j}, m, n \geq n_j$ فرض می‌کنیم $y_1 = x_{n_1}$ و به ازای $j > 1$ ، $y_j = x_{n_j} - x_{n_{j-1}}$. در این صورت

$$\sum_1^k y_j = x_{n_k} \text{ و}$$

$$\sum_1^\infty \|y_j\| \leq \|y_1\| + \sum_1^\infty 2^{-j} = \|y_1\| + 1 < \infty.$$

بنابر این $x_{n_k} = \sum_1^\infty y_j$ وجود دارد. اما چون دنباله $\{x_n\}$ کشی است به آسانی دیده می‌شود که $\{x_n\}$ به همان حدی

همگرا است که دنباله $\{x_{n_k}\}$ به آن همگرا است. ■

قبلاً مثال هایی از فضاهاي باناخ ديده ايم. اولاً، اگر X يك فضاى توپولوژيك باشد، $B(X)$ و $BC(X)$ با نرم يكنواخت $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$ دو فضاى باناخ هستند. ثانياً، اگر (X, \mathcal{M}, μ) يك فضاى اندازه باشد، $L^1(\mu)$ با نرم L^1 ، يعنى، با نرم $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$ يك فضاى باناخ است. (توجه كنيد كه اگر به $L^1(\mu)$ صرفاً به چشم مجموعه اى شامل توابع نگاه كنيم، آنگاه $\| \cdot \|_1$ فضاى يك نيم نرم است، اما اگر توابعى را كه تقريباً همه جا برابرند يكي بگيريم يك نرم مى شود.) كامل بودن $L^1(\mu)$ از فضايى ۲.۲۵ و ۵.۱ نتیجه مى شود. در واقع اگر $\sum_1^{\infty} \|f_n\|_1 < \infty$ ، آنگاه از قضيه ۲.۲۵ مى شود كه $f = \sum_1^{\infty} f_n$ تقريباً همه جا وجود دارد و وقتى $N \rightarrow \infty$

$$\left(\int |f - \sum_1^N f_n| d\mu \leq \sum_{N+1}^{\infty} \int |f_n| d\mu \rightarrow 0 \right)$$

در تمرين هاي ۸ الى ۱۱ و بخش هاي بعدى مثال هاي بيشتري يافت مى شوند. اگر X و Y دو فضاى بردارى نرم دار باشند، $X \times Y$ به هنگام تجهيز به نرم حاصلضربى زير به يك فضاى بردارى نرم دار تبديل مى شود:

$$\|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|).$$

(البته، در اينجا $\|x\|$ به نرم روى X اشاره دارد درحالى كه $\|y\|$ نشان دهنده نرم روى Y است) برخى اوقات نرم هايى هم ارز با همين

$$\|(x, y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}} \text{ يا } \|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \text{ مثلاً مى شوند،}$$

يك ساختار مربوط به بحث فضاهاي خارج قسمتى است. اگر \mathcal{M} يك زيرفضاى بردارى فضاى بردارى X باشد، \mathcal{M} يك رابطه هم ارزى روى X به صورت زير تعريف مى كند: $x \sim y$ اگر و تنها اگر $x - y \in \mathcal{M}$. رده هم ارزى شامل $x \in X$ با $x + \mathcal{M}$ و مجموعه رده هاي هم ارزى، يا فضاى خارج قسمتى با X/\mathcal{M} نشان داده مى شود. با اعمال بردارى $(x + \mathcal{M}) + (y + \mathcal{M}) = (x + y) + \mathcal{M}$ و $\lambda(x + \mathcal{M}) = (\lambda x) + \mathcal{M}$ يك فضاى بردارى است. اگر X يك فضاى بردارى نرم دار و \mathcal{M} بسته باشد، X/\mathcal{M} از X يك نرم موسوم به نرم خارج قسمتى به ارث مى برد، اين نرم به صورت زير تعريف مى شود:

$$\|x + \mathcal{M}\| = \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x + y\|.$$

براي مباحث جزئى تر، تمرين ۱۲ را ببينيد.

(نگاشتي خطى مانند $T : X \rightarrow Y$ بين دو فضاى بردارى نرم دار، کراندار ناميده مى شود هرگاه ثابتى مانند $C \geq 0$ وجود داشته باشد به طوري كه به ازاي هر $x \in X$

$$\|Tx\| \leq C\|x\|.$$

اين کراندارى با مفهوم کراندارى توابع روى يك مجموعه تفاوت دارد. با تعريف کراندارى توابع، T وقتى کراندار است كه به ازاي هر x ، $\|Tx\| \leq C$ ، به وضوح هيچ نگاشت خطى غير صفر نمى تواند در شرط اخير صدق كند، زيرا به ازاي همه اسکالرهاى λ ، $T(\lambda x) = \lambda Tx$ تعريف جديد به اين معنا است كه T روى زيرمجموعه هاي کراندار X کراندار است.

- (الف) T پیوسته است.
 (ب) T در 0 پیوسته است.
 (ج) T کراندار است.

برهان. بدیهی است که (الف) گزاره (ب) را ایجاب می‌کند. چنانچه T در $0 \in X$ پیوسته باشد، یک همسایگی مانند U از 0 وجود دارد به طوری که $\{y \in Y : \|y\| \leq 1\} \supset T(U)$ و U باید شامل گویی حول 0 مانند $B = \{x \in X : \|x\| \leq \delta\}$

باشد؛ بنابر این وقتی $\|x\| \leq \delta$ ، $\|Tx\| < 1$. چون T با ضرب اسکالر جابه‌جا می‌شود، معلوم می‌شود که هرگاه $\|x\| \leq a$ ، $\|Tx\| \leq a\delta^{-1}$ ، یعنی $\|Tx\| \leq \delta^{-1}\|x\|$. این نشان می‌دهد که (ب) گزاره (ج) را ایجاب می‌کند. بالاخره، اگر به ازای هر x ، $\|Tx\| \leq C\|x\|$ ، آنگاه وقتی $\|x_1 - x_2\| \leq \varepsilon$ ، $\|Tx_1 - Tx_2\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq C\varepsilon$ و لذا T پیوسته است. ■

اگر X و Y دو فضای برداری نرم‌دار باشند، فضای همه نگاشت‌های خطی کراندار از X به Y را با $L(X, Y)$ نشان می‌دهیم. به آسانی دیده می‌شود که $L(X, Y)$ یک فضای برداری است و نگاشت $\|T\| \rightarrow T$ یک نرم موسوم به نرم عملگر روی $L(X, Y)$ است که در آن $\|T\|$ به صورت زیر تعریف می‌شود (تمرین ۲):

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$$

$$= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} \quad (1.5)$$

$$= \inf\{C : \|Tx\| \leq C\|x\|, x \text{ به ازای هر } x\}$$

همیشه فرض می‌کنیم که $L(X, Y)$ به همین نرم مجهز است مگر آنکه خلاف آن ذکر شود.

۴.۵ گزاره. اگر Y کامل باشد، آنگاه $L(X, Y)$ نیز کامل است.

برهان. فرض کنیم $\{T_n\}$ یک دنباله کشی در $L(X, Y)$ باشد. اگر $x \in X$ ، آنگاه $\{T_n x\}$ یک دنباله کشی در Y است زیرا $\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\|$. با $Tx = \lim T_n x$ ، $T : X \rightarrow Y$ را با $Tx = \lim T_n x$ تعریف می‌کنیم. بررسی اینک $T \in L(X, Y)$ و $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ به خواننده واگذار می‌شود (در واقع $\|T\| = \lim \|T_n\|$) (تمرین ۳). ■

نامساوی زیر، خاصیت مفید دیگری از نرم عملگر است. اگر $T \in L(X, Y)$ و $S \in L(Y, Z)$ ، آنگاه

$$\|STx\| \leq \|S\| \|Tx\| \leq \|S\| \|T\| \|x\|$$

لذا $ST \in L(X, Z)$ و $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$. به ویژه $L(X, X)$ یک جبر است. در حقیقت اگر X کامل باشد، $L(X, Y)$ یک جبر باناخ است؛ یعنی، فضای باناخ است که یک جبر نیز می باشد به طوری که نرم حاصلضرب، حداکثر حاصلضرب نرم ها شود. (مثال دیگری از جبر باناخ $BC(X)$ با ضرب نقطه به نقطه و نرم یکنواخت است که در آن X یک فضای توپولوژیک است).
 اگر $T \in L(X, Y)$ ، آنگاه T وارون پذیر یا یک ایزومورفیسم نامیده می شود هرگاه T دوسویی و T^{-1} کراندار باشد (به عبارت دیگر، به ازای ثابتی چون $C > 0$ ، $\|Tx\| \geq C\|x\|$)، T یک ایزومتتری نامیده می شود هرگاه به ازای هر $x \in X$ ، $\|Tx\| = \|x\|$ ، هر ایزومتتری یک به یک است اما لزوماً پوشا نیست؛ گرچه یک ایزومورفیسم بروی بردش است.

تمرین ها

(۱) اگر X یک فضای برداری نرم دار روی $(\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R})$ باشد، آنگاه جمع برداری و ضرب اسکالر به عنوان توابعی از $X \times X$ و $X \times X$ به X پیوسته اند. به علاوه، تابع نرم از X به $[0, \infty)$ پیوسته است؛ در واقع

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

(۲) $L(X, Y)$ یک فضای برداری است و $\|\cdot\|$ که با (۵.۳) تعریف شد یک نرم روی $L(X, Y)$ است. به ویژه، سه عبارت سمت راست (۵.۳) همواره با هم برابرند.

(۳) برهان گزاره (۵.۴) را کامل کنید.

(۴) اگر X و Y دو فضای برداری نرم دار باشد، نگاشت $Tx \mapsto (T_1x)$ از $L(X, Y) \times X$ به Y پیوسته است. (یعنی، اگر $T_n \rightarrow T$ و $x_n \rightarrow x$ ، آنگاه $T_n x_n \rightarrow Tx$).

(۵) اگر X یک فضای برداری نرم دار باشد، بستر هر زیرفضای X یک زیرفضا است.

(۶) فرض کنید X یک فضای برداری یا بعدی متناهی باشد، e_1, \dots, e_n را پایه ای برای X بینگارید و تعریف کنید

$$\| \sum_{j=1}^n a_j e_j \|_1 = \sum_{j=1}^n |a_j|$$

الف) $\|\cdot\|_1$ یک نرم روی X است.

ب) نگاشت $\sum_{j=1}^n a_j e_j \mapsto (a_1, \dots, a_n)$ از K^n با توپولوژی اقلیدسی معمولی به X با توپولوژی تعریف شده با $\|\cdot\|_1$ پیوسته

است.

(ج) $\{x \in X : \|x\|_1 = 1\}$ نسبت به توپولوژی تعریف شده با $\|\cdot\|_1$ فشرده است.
 (د) همه نرم‌ها روی X هم‌ارز هستند. (هر نرمی را با $\|\cdot\|_1$ مقایسه کنید).

(۷) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. نشان دهید که:
 الف) اگر $T \in L(X, X)$ و $\|I - T\| < 1$ که در آن I عملگر همانی است، آنگاه T وارون پذیر است؛ در حقیقت، سری $\sum_{n=0}^{\infty} (I - T)^n$ در $L(X, X)$ به T^{-1} همگرا است.
 ب) اگر $T \in L(X, X)$ وارون پذیر باشد و $\|S - T\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ ، آنگاه S وارون پذیر است، بنابراین این مجموعه عملگرهای وارون پذیر در $L(X, X)$ باز است.

(۸) فرض کنید (X, \mathcal{M}) یک فضای اندازه پذیر و $M(X)$ فضای اندازه های مختلط روی (X, \mathcal{M}) باشید. در این صورت $\|\mu\| = |\mu|(X)$ یک نرم روی $M(X)$ است که آن را به یک فضای باناخ تبدیل می کند. (قضیه ۵.۱ را به کار بندید).

(۹) فرض کنید $C^k([0, 1])$ فضای توابع روی $[0, 1]$ باشد که مشتقات آنها با احتساب مشتقات یک طرفه در نقاط انتهایی تا مرتبه k ام روی $[0, 1]$ پیوسته هستند. نشان دهید که:
 الف) اگر $f \in C([0, 1])$ ، آنگاه $f \in C^k([0, 1])$ اگر و تنها اگر $f, f', \dots, f^{(k)}$ هر بار بر $(0, 1)$ به طور پیوسته مشتق پذیر باشد و به ازای هر $j \leq k$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{(j)}(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f^{(j)}(x)$ وجود داشته باشند. (قضیه مقدار میانگین کمک می کند).
 ب) $\|f\| = \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_{\infty}$ یک نرم روی $C^k([0, 1])$ است که $C^k([0, 1])$ را به یک فضای باناخ تبدیل می کند. (استقرا روی k را به کار برید. نکته اصلی این است که اگر $\{f_n\} \subset C^1([0, 1])$ ، $f_n \rightarrow f$ به طور یکنواخت و $f'_n \rightarrow g$ به طور یکنواخت، آنگاه $f \in C^1([0, 1])$ و $f' = g$. ساده ترین راه اثبات این مطلب، این است که نشان دهیم $f(x) - f(0) = \int_0^x g(t) dt$).

(۱۰) فرض کنید $L^1_k([0, 1])$ فضای همه توابع $f \in C^{k-1}([0, 1])$ باشد به طوری که $f^{(k-1)}$ بر $[0, 1]$ مطلقاً پیوسته است. (و در نتیجه $f^{(k)}$ وجود دارد و در $L^1([0, 1])$ است). در این صورت $\|f\| = \sum_{j=0}^k \int_0^1 |f^{(j)}(x)| dx$ یک نرم روی $L^1_k([0, 1])$ است که آن را به یک فضای باناخ تبدیل می کند (تمرین ۹ و راهنمایی آن را ببینید).

(۱۱) فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ و $\Lambda_{\alpha}([0, 1])$ فضای توابع پیوسته هولدری با نمای α بر $[0, 1]$ باشد. یعنی، $f \in \Lambda_{\alpha}([0, 1])$ اگر و تنها اگر $\|f\|_{\Lambda_{\alpha}} < \infty$ که در آن

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha} = |f(0)| + \sup_{x,y \in [0,1], x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

نشان دهید که:

الف) $\|\cdot\|_{\Lambda_\alpha}$ یک نرم است که $\Lambda_\alpha([0,1])$ را به یک فضای باناخ تبدیل می‌کند.
 ب) فرض کنید $\lambda_\alpha([0,1])$ مجموعه همه اعضای $f \in \Lambda_\alpha([0,1])$ باشد به طوری که به ازای هر $y \in [0,1]$ وقتی $x \rightarrow y$ ، $\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \rightarrow 0$ ، اگر $\alpha < 1$ ، $\lambda_\alpha([0,1])$ یک زیرفضای بسته با بعد نامتناهی از $\Lambda_\alpha([0,1])$ است. اگر $\alpha = 1$ ، فقط شامل توابع ثابت است.

۱۲) فرض کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار و \mathcal{M} زیرفضای سره‌ای از X باشد. نشان دهید که:

الف) $\|x + \mathcal{M}\| = \inf\{\|x + y\| : y \in \mathcal{M}\}$ یک نرم روی X/\mathcal{M} است؛

ب) به ازای هر $\varepsilon > 0$ عضو $x \in X$ وجود دارد به طوری که $\|x\| = 1$ و $\|x + \mathcal{M}\| \geq 1 - \varepsilon$ ؛

ج) نگاشت تصویر $\pi(x) = x + \mathcal{M}$ از X به X/\mathcal{M} دارای نرم ۱ است؛

د) اگر X کامل باشد، X/\mathcal{M} نیز کامل است. (قضیه ۵۰۱ را به کار برید.)

ه) توپولوژی تعریف شده با نرم خارج قسمتی همان توپولوژی خارج قسمتی تعریف شده در تمرین ۲۸ از بند ۴.۲ است.

۱۳) فرض کنید $\|\cdot\|$ یک نیم‌نرم روی فضای برداری X باشد، قرار دهید $\mathcal{M} = \{x \in X : \|x\| = 0\}$. در این صورت \mathcal{M} یک زیرفضا است و نگاشت $\|x\| \mapsto \|x + \mathcal{M}\|$ یک نرم روی X/\mathcal{M} است.

۱۴) اگر X یک فضای برداری نرم‌دار و \mathcal{M} زیرفضای غیر بسته‌ای از X باشد، آنگاه $\|x + \mathcal{M}\|$ که در تمرین ۱۲ تعریف شد، یک نیم‌نرم روی X/\mathcal{M} است. اگر همانند تمرین ۱۳، X/\mathcal{M} را به فضای پوچش تقسیم کنیم فضای خارج قسمتی حاصل به طور ایزومتریک با $X/\overline{\mathcal{M}}$ ایزومورف است. (به تمرین ۵ مراجعه کنید.)

۱۵) فرض کنید X و Y دو فضای برداری نرم‌دار باشند و $T \in L(X, Y)$. قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$$

نشان دهید که:

الف) $\mathcal{N}(T)$ زیرفضای بسته‌ای از X است؛

ب) عضو یکتایی چون $S \in L(X/\mathcal{N}(T), Y)$ وجود دارد به طوری که $T = S \circ \pi$ که در آن

$\pi : X \rightarrow X/\mathcal{N}(T)$ نگاشت تصویر است (تمرین ۱۲ را ببینید). به علاوه $\|S\| = \|T\|$.

اگر X یک فضای برداری روی \mathbb{C} باشد، آنگاه X یک فضای برداری روی \mathbb{R} نیز می‌باشد و می‌توانیم هم تابع‌های خطی حقیقی $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ و هم تابع‌های خطی مختلط $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ را در نظر بگیریم. رابطه بین این دو به صورت زیر است:

۵.۱ گزاره. فرض کنیم X یک فضای برداری روی \mathbb{C} باشد. اگر f یک تابع خطی مختلط روی X باشد و $u = \operatorname{Re} f$ ، آنگاه u یک تابع خطی حقیقی است و به ازای هر $x \in X$ ، $f(x) = u(x) - iu(ix)$. به عکس، اگر u یک تابع خطی حقیقی روی X باشد و $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ به صورت $f(x) = u(x) - iu(ix)$ تعریف شود، آنگاه f خطی مختلط است. در این حالت، اگر X نرم‌دار باشد، داریم: $\|u\| = \|f\|$.

برهان. اگر f خطی مختلط باشد، و $u = \operatorname{Re} f$ ، آنگاه به وضوح u خطی حقیقی است و

$$\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re}[if(x)] = -u(ix)$$

لذا $f(x) = u(x) - iu(ix)$ از سوی دیگر، اگر u خطی حقیقی باشد و $f(x) = u(x) - iu(ix)$ ، آنگاه به وضوح f روی \mathbb{R} خطی است و $f(ix) = u(ix) - iu(-x) = u(ix) + iu(x) = if(x)$ ، لذا f روی \mathbb{C} نیز خطی است. بالاخره، اگر X نرم‌دار باشد، چون $|f(x)| \leq \operatorname{Re} f(x) \leq |f(x)|$ داریم $|u(x)| = |\operatorname{Re} f(x)| \leq |f(x)|$. از طرف دیگر، اگر $f(x) \neq 0$ ، قرار می‌دهیم $\alpha = \overline{\operatorname{sgn} f(x)}$. در این صورت $f(\alpha x) = u(\alpha x) = \alpha f(x) = |f(x)|$ (زیرا $f(\alpha x)$ حقیقی است)، لذا

$$\|f\| \leq \|u\| \quad \text{و از اینجا معلوم می‌شود که} \quad \|f(x)\| \leq \|u\| \|\alpha x\| = \|u\| \|x\|$$

وجود تابع‌های خطی کراندار غیر صفر روی یک فضای برداری نرم‌دار دل‌خواه واضح نیست. در واقع وجود مفروضه چنین تابع‌هایی یکی از قضایای بنیادی آنالیز تابعی است. هم‌اکنون این حکم را به شکلی کلی‌تر خواهیم آورد که دارای کاربردهای مهم دیگری است. اگر X یک فضای برداری حقیقی باشد، یک تابع زیرخطی روی X نگاهیستی چون $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\lambda \geq 0$ ،

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

به عنوان مثال، هر نیم‌نرم یک تابع زیرخطی است.

۵.۶ قضیه هان - باناخ. فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی، p یک نگاهیستی زیرخطی روی X ، \mathcal{M} زیرفضایی از X و f یک تابع خطی روی \mathcal{M} باشد به طوری که به ازای هر $x \in \mathcal{M}$ ، $f(x) \leq p(x)$ در این صورت یک تابع خطی مانند F روی X وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in X$ ، $F(x) \leq p(x)$ و $F|_{\mathcal{M}} = f$.

برهان. با نشان دادن این مطلب اثبات را شروع می‌کنیم که اگر $x \in X \setminus \mathcal{M}$ ، آنگاه f را به یک تابع خطی مانند g روی $\mathcal{M} + \mathbb{R}x$ می‌توان توسعه داد که برای هر y در \mathcal{M} $g(y) \leq p(y)$ صدق کند. اگر $y_1, y_2 \in \mathcal{M}$ داریم:

$$f(y_1) + f(y_2) = f(y_1 + y_2) \leq p(y_1 + y_2) \leq p(y_1 - x) + p(x + y_2),$$

$$f(y_1) - p(y_1 - x) \leq p(x + y_2) - f(y_2).$$

یا

$$\sup\{f(y) - p(y - x) : y \in \mathcal{M}\} \leq \inf\{p(x + y) - f(y) : y \in \mathcal{M}\}.$$

بنابراین

فرض کنیم α عددی باشد که در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\sup\{f(y) - p(y - x) : y \in \mathcal{M}\} \leq \alpha \leq \inf\{p(x + y) - f(y) : y \in \mathcal{M}\},$$

و $g : \mathcal{M} + \mathbb{R}x \rightarrow \mathbb{R}$ را با $g(y + \lambda x) = f(y) + \lambda\alpha$ تعریف کنید. در این صورت به وضوح g خطی است و

$g|_{\mathcal{M}} = f$. لذا به ازای هر $y \in \mathcal{M}$ ، $g(y) \leq p(y)$ ، به علاوه، اگر $\lambda > 0$ و $y \in \mathcal{M}$ ، آنگاه

$$g(y + \lambda x) = \lambda[f(\frac{y}{\lambda}) + \alpha] \leq \lambda[f(\frac{y}{\lambda}) + p(x + (\frac{y}{\lambda})) - f(\frac{y}{\lambda})] = p(y + \lambda x),$$

در حالی که اگر $\lambda = -\mu < 0$ ، آنگاه

$$g(y + \lambda x) = \mu[f(\frac{y}{\mu}) - \alpha] \leq \mu[f(\frac{y}{\mu}) - f(\frac{y}{\mu}) + p((\frac{y}{\mu}) - x)] = p(y + \lambda x).$$

بنابر این به ازای هر $z \in \mathcal{M} + \mathbb{R}x$ ، $g(z) \leq p(z)$ ،

ظاهراً همین استدلال را می‌توان برای هر توسعه خطی F از f که روی دامنه‌اش در $F \leq p$ صدق می‌کند به کار برد و

این نشان می‌دهد که دامنه یک توسعه خطی ماکسیمال صادق در $F \leq p$ باید کل فضای X باشد. اما خانواده F متشکل از

همه توسعه‌های خطی F از f که در $F \leq p$ صدق می‌کنند با رابطه شمول جزئاً مرتب می‌شود (نگاشت‌ها از فضاهای X به

\mathbb{R} به عنوان زیرمجموعه‌های از $X \times \mathbb{R}$ در نظر گرفته می‌شوند). چون اجتماع هر خانواده صعودی از زیرفضاهای X باز هم

یک زیرفضا است، به آسانی دیده می‌شود که اجتماع هر زیرخانواده مرتب خطی F در F واقع است. بنابراین فراخوانی لم زورن

برهان را کامل می‌کند. ■

اگر p یک نیم نرم و $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ خطی باشد، نامساوی $f \leq p$ با نامساوی $|f| \leq p$ هم‌ارز است، زیرا

$|f(x)| = \pm f(x) = f(\pm x) = p(\pm x)$ و $p(-x) = p(x)$. با این توضیح، قضیه‌ها - باناخ برای تابع‌های خطی مختلط

نیز به کار می‌رود:

۵.۷ قضیه هان - باناخ مختلط. فرض کنیم X یک فضای برداری مختلط، p یک نیم روی X ، \mathcal{M} زیرفضایی از X و f یک تابع خطی مختلط روی \mathcal{M} باشد به طوری که به ازای هر $x \in \mathcal{M}$ ، $|f(x)| \leq p(x)$. در این صورت یک تابع خطی مختلط مانند F روی X وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in X$ ، $|F(x)| \leq p(x)$ و $F|_{\mathcal{M}} = f$.

برهان. فرض می کنیم $u = \operatorname{Re} f$. بنا بر قضیه ۵.۶ یک توسعه خطی حقیقی مانند U از u به X وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in X$ ، $|U(x)| \leq p(x)$. همانند گزاره ۵.۵ فرض می کنیم $F(x) = U(x) - iU(ix)$. در این صورت F یک توسعه خطی مختلط f است و مانند آنچه در برهان گزاره ۵.۵ دیدیم اگر $\alpha = \overline{\operatorname{sgn} F(x)}$ ، آنگاه $|F(x)| = \alpha F(x) = F(\alpha x) = U(\alpha x) \leq p(\alpha x) = p(x)$. ■

از اینجا تا بند ۵.۵ همه حکمها در مورد فضاهای برداری حقیقی یا مختلط به طور یکسان به کار می رود، اما برای تعاریف هم که شده فرض خواهیم کرد که میدان اسکالر \mathbb{C} است. کاربردهای اساسی قضیه هان - باناخ برای فضاهای برداری نرم دار در قضیه زیر خلاصه می شود.

۵.۸ قضیه. فرض کنیم X یک فضای برداری نرم دار باشد. در این صورت:

(الف) اگر \mathcal{M} زیرفضای بسته ای از X باشد و $x \in X \setminus \mathcal{M}$ ، آنگاه عضوی چون $f \in X^*$ وجود دارد به طوری که $f|_{\mathcal{M}} = 0$ ، $f(x) \neq 0$ و واقعاً، اگر $\delta = \inf_{y \in \mathcal{M}} \|x - y\|$ ، آنگاه f را می توان طوری گرفت که در $\|f\| = 1$ و $f(x) = \delta$ صدق کند؛

(ب) اگر $x \in X$ ، $0 \neq x$ ، آنگاه عضوی چون $f \in X^*$ وجود دارد به طوری که $\|f\| = 1$ و $f(x) = \|x\|$ ؛

(ج) تابع های خطی کراندار روی X ، نقاط را جدا می کنند؛

(د) اگر $\hat{x} : X^* \rightarrow \mathbb{C}$ ، $x \in X$ را با $\hat{x}(f) = f(x)$ تعریف می کنیم. در این صورت $\hat{x} : x \mapsto \hat{x}$ یک ایزومتري خطی از X بتوی X^{**} است (X^{**} دوگان X^* است).

برهان. برای اثبات (الف)، f را روی $\mathcal{M} + \mathbb{C}x$ به صورت $f(y + \lambda x) = \lambda \delta$ تعریف می کنیم (که در آن $y \in \mathcal{M}$

و $\lambda \in \mathbb{C}$). در این صورت $f(x) = \delta$ ، $f|_{\mathcal{M}} = 0$ و برای $\lambda \neq 0$ ،

$$|f(y + \lambda x)| |\lambda| \delta \leq |\lambda| \|\lambda^{-1}y + x\| = \|y + \lambda x\|.$$

بنابر این قضیه هان - باناخ را با $p(x) = \|x\|$ و جایگزینی $\mathcal{M} + \mathbb{C}x$ به جای \mathcal{M} می توان به کار برد. (ب) حالت خاص (الف) با $\{0\} = \mathcal{M}$ است و بلافاصله (ج) نتیجه می شود: چنانچه $y \neq x$ ، عضوی چون $f \in X^*$ وجود دارد که $f(x - y) \neq 0$ ، یعنی $f(x) \neq f(y)$. اما در مورد (د)، به وضوح \hat{x} یک تابع خطی روی X^* است و نگاشت

$x \mapsto \hat{x}$ خطی است. به علاوه، $\|\hat{x}(f)\| = \|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|$ ، لذا $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$. از طرف دیگر، (ب) ایجاب می کند که $\|\hat{x}\| \geq \|x\|$. ■

با نمادگذاری قسمت (د) از قضیه ۵.۸، فرض کنید $\hat{X} = \{\hat{x} : x \in X\}$. چون X^{**} همواره کامل است پس بستار $\overline{\hat{X}}$ از \hat{X} در X یک فضای باناخ است و نگاشت $x \mapsto \hat{x}$ فضای X را به صورت زیرفضایی چگال در $\overline{\hat{X}}$ می نشانند. $\overline{\hat{X}}$ کامل شده X نامیده می شود. به ویژه، اگر خود X یک فضای باناخ باشد، آنگاه $\overline{\hat{X}} = X$. اگر X با بعد متناهی باشد، آنگاه $\hat{X} = X^{**}$ ، زیرا بعدهای این فضاها برابر هستند. برای فضاهای باناخ با بعد نامتناهی ممکن است تساوی $\hat{X} = X^{**}$ رخ دهد و ممکن است رخ ندهد؛ اگر تساوی رخ دهد، X بازتابی نامیده می شود. مثال هایی از فضاهای باناخ که تاکنون مورد آزمایش قرار داده ایم بازتابی نیستند. به جز در حالت های بدیهی که فضاها با بعد متناهی بودند. این حکم را در برخی حالات ثابت خواهیم کرد و در بخش های بعد مثال هایی از فضاهای باناخ بازتابی ارائه خواهیم داد. معمولاً \hat{x} را با x یکی گرفته و به این ترتیب X^{**} را به عنوان زیرفضایی از X خواهیم گرفت؛ در این صورت بازتابی بودن به معنی تساوی $X^{**} = X$ است.

تمرین ها

(۱۷) یک تابع خطی مانند f روی یک فضای برداری نرم دار مانند X کراندار است اگر و تنها اگر $f^{-1}(\{0\})$ بسته باشد. (قسمت (ب) از تمرین ۱۲ را به کار برید.)

(۱۸) فرض کنیم X یک فضای برداری نرم دار باشد. نشان دهید که:
 الف) اگر M زیرفضای بسته ای از X باشد و $x \in X \setminus M$ ، آنگاه $M + \mathbb{C}x$ بسته است. (قسمت (الف) از قضیه ۵.۸ را به کار برید.)
 ب) هر زیرفضای با بعد متناهی از X بسته است.

(۱۹) فرض کنیم X یک فضای برداری نرم دار با بعد نامتناهی باشد. نشان دهید که:
 الف) دنباله ای مانند $\{x_j\}$ در X وجود دارد به طوری که به ازای هر j ، $\|x_j\| = 1$ و برای $k \neq j$ ، $\|x_k - x_j\| \geq \frac{1}{j}$.
 ب) به کارگیری قسمت (ب) از تمرین ۱۲ و تمرین ۱۸، x_j را به طور استقرایی بسازید.
 ب) فشرده موضعی نیست.

(۲۰) اگر M زیرفضایی با بعد متناهی از یک فضای برداری مانند X باشد، آنگاه زیرفضای بسته‌ای مانند N وجود دارد به طوری که $M \cap N = \{0\}$ و $M + N = X$.

(۲۱) اگر X و Y دو فضای نرم دار باشند، $\alpha : X^* \times Y^* \rightarrow (X \times Y)^*$ را با $\alpha(f, g)(x, y) = f(x) + g(y)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت α ایزومورفیسمی است که اگر نرم $\|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ روی $X \times Y$ ، نرم عملگر متناظر روی $(X \times Y)^*$ و نرم $\|(f, g)\| = \|f\| + \|g\|$ روی $X^* \times Y^*$ را به کار ببریم یک ایزومتری است.

(۲۲) فرض کنیم X و Y فضاهای برداری نرم‌داری باشند و $T \in L(X, Y)$. الف) $T^\dagger : Y^* \rightarrow X^*$ را با $T^\dagger f = f \circ T$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $T^\dagger \in L(Y^*, X^*)$ و $\|T^\dagger\| = \|T\|$.

T^\dagger الحاق یا ترانهاذه T نامیده می‌شود.

ب) نحوه ساخت (الف) را دو بار به کار برده و به دست می‌آوریم $T^{\dagger\dagger} \in L(X^{**}, Y^{**})$. اگر X و Y را با تصاویر طبیعی آنها، یعنی \hat{X} و \hat{Y} در X^{**} و Y^{**} یکی بگیریم، آنگاه $T^{\dagger\dagger}|_{\hat{X}} = T$.

ج) T^\dagger یک به یک اگر و تنها اگر برد T در Y چگال باشد.

د) اگر برد T^\dagger در X^* چگال باشد، آنگاه T یک به یک است؛ اگر X بازتابی باشد عکس مطلب نیز درست است.

(۲۳) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. M را زیرفضای بسته‌ای از X و N را زیرفضای بسته‌ای از X^* بگیرید و فرض کنید $M^\circ = \{f \in X^* : f|_M = 0\}$ و

$$N^\perp = \{x \in X : f(x) = 0, f \in N\}.$$

(بنابر این، اگر X را با تصویرش در X^{**} یکی بگیریم، آنگاه $N^\perp = N^\circ \cap X$ ، نشان دهید که

الف) M° و N^\perp به ترتیب زیرفضاهای بسته‌ای از X^* و X هستند.

ب) $(M^\circ)^\perp = M$ و $(N^\perp)^\circ \supset N$ ، چنانچه X بازتابی باشد، $(N^\perp)^\circ = N$.

ج) فرض کنید $\pi : X \rightarrow X/M$ نگاشت تصویر طبیعی باشد و $\alpha : (X/M)^* \rightarrow X^*$ را با $\alpha(f) = f \circ \pi$ تعریف کنید. در این صورت α از $(X/M)^*$ بروی M° یک ایزومورفیسم ایزومتري است که در آن نرم X/M نرم خارج قسمتی است.

د) $\beta : X^* \rightarrow M^*$ را با $\beta(f) = f|_M$ تعریف می‌کنیم؛ در این صورت β نگاشتی چون $\bar{\beta} : X^*/M^\circ \rightarrow M^*$ همانند تمرین ۱۵ القاء می‌کند و $\bar{\beta}$ یک ایزومورفیسم ایزومتري است.

(۲۴) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد.

الف) فرض کنید \hat{X} و $(X^*)^\wedge$ تصاویر طبیعی X و X^* در X^{***} و X^{**} باشند و $\hat{X}^\circ = \{F \in X^{***} : F|_{\hat{X}} = 0\}$. در این صورت $(X^*)^\wedge \cap \hat{X}^\circ = \{0\}$ و $(X^*)^\wedge + \hat{X}^\circ = X^{***}$ (ب) X بازتابی است اگر و تنها اگر X^* بازتابی باشد.

(۲۵) اگر X یک فضای باناخ و X^* جدایی پذیر باشد، آنگاه X جدایی پذیر است. (فرض کنید $\{f_n\}_1^\infty$ زیرمجموعه چگال شمارش پذیری از X^* باشد. به ازای هر $x_n \in X$ ، n را طوری انتخاب کنید که $\|x_n\| = 1$ و $|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{4}\|f_n\|$. در این صورت ترکیبات خطی $\{x_n\}_1^\infty$ در X چگالند.)
تبصره: جدایی پذیری X جدایی پذیری X^* را ایجاب نمی کند.

(۲۶) فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی و P زیرمجموعه ای از X باشد به طوری که (i): اگر $y \in P$ ، آنگاه $x + y \in P$ و (ii): اگر $x \in P$ و $\lambda \geq 0$ ، آنگاه $\lambda x \in P$ و (iii): اگر $x \in P$ و $-x \in P$ ، آنگاه $x = 0$.
(مثال: اگر X فضایی از توابع با مقدار حقیقی باشد، P را می توان مجموعه توابع نامنفی در X گرفت.)
الف) رابطه \leq که با « $x \leq y$ اگر و تنها اگر $y - x \in P$ » تعریف می شود یک ترتیب جزئی روی X است.
ب) (قضیه توسعه کرین) فرض کنیم \mathcal{M} زیرفضایی از X باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$ عضوی چون $y \in \mathcal{M}$ وجود داشته باشد که $x \leq y$. اگر f یک تابع خطی روی \mathcal{M} باشد به طوری که برای هر $x \in \mathcal{M} \cap P$ داشته باشیم $f(x) \geq 0$ ، آنگاه یک تابع خطی مانند F روی X وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in P$ ، $F(x) \geq 0$ و $F|_{\mathcal{M}} = f$ و $p(x) = \inf\{f(y) : y \in \mathcal{M}, x \leq y\}$ را در نظر بگیرید.)

۵.۳ قضیه کاتگوری بئر و کاربردهای آن

در این بخش قضیه مهمی در مورد فضاهای متریک کامل ذکر می کنیم و با استفاده از آن چند حکم بنیادی در باب نگاشت های خطی بین فضاهای باناخ به دست می آوریم.

۵.۹ قضیه کاتگوری بئر. فرض کنیم X یک فضای متریک کامل باشد.

الف) اگر $\{U_n\}_1^\infty$ دنباله ای از مجموعه های چگال باز در X باشد، آنگاه $\bigcap_1^\infty U_n$ در X باز است.
ب) X اجتماع شمارش پذیری از مجموعه های هیچ جا چگال نیست.

برهان. برای قسمت (الف)، باید نشان دهیم که اگر W یک مجموعه باز ناتهی در X باشد، آنگاه W مجموعه $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ را قطع می کند چون $U_1 \cap W$ باز و ناتهی است، شامل یک گوی مانند $B(r_0, x_0)$ است و می توان فرض کرد که $0 < r_0 < 1$ و به ازای هر $n > 0$ و $x_n \in X$ و $r_n \in (0, \infty)$ را به طور استقرایی زیر انتخاب می کنیم: با داشتن x_j و r_j برای $j < n$ مشاهده می کنیم که $U_n \cap B(r_{n-1}, x_{n-1})$ باز و تهی است، لذا می توان x_n و r_n را چنان انتخاب کرد که $0 < r_n < 2^{-n}$ و $\overline{B(r_n, x_n)} \subset U_n \cap B(r_{n-1}, x_{n-1})$ در این صورت اگر $m, n \geq N$ می بینیم که $x_n, x_m \in B(r_N, x_N)$ و چون $r_n \rightarrow 0$ دنباله $\{x_n\}$ کشی است. چون X کامل است، $x = \lim x_n$ وجود دارد. از آنجا که به ازای هر $x_n \in B(r_N, x_N)$ ، $n \geq N$ برای همه N ها داریم:

$$x \in \overline{B(r_N, x_N)} \subset U_N \cap B(r_0, x_0) \subset U_N \cap W,$$

و برهان کامل می شود.

اما در مورد (ب) می بینیم اگر $\{E_n\}$ دنباله ای از مجموعه های هیچ جا چگال در X باشد، آنگاه $\{(\overline{E_n})^c\}$ دنباله ای از مجموعه های چگال باز است. چون $\bigcap (\overline{E_n})^c \neq \emptyset$ ، داریم $\bigcup E_n \subset \bigcup \overline{E_n} \neq X$.

یادآوری می کنیم که چون نتیجه گیری های قضیه کاتگوری بئر صرفاً توپولوژیکی هستند، کافی است X با یک فضای متریک کامل همیومورف باشد. برای مثال، قضیه فوق برای $X = (0, 1)$ معتبر است، گر چه X با متر معمولی کامل نیست اما با \mathbb{R} همیومورف است.

نام این قضیه از اصطلاحات بئر برای مجموعه ها گرفته شده است: اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، در توافق با بئر، مجموعه ای چون $E \subset X$ از کاتگوری اول است هرگاه E اجتماع شمارش پذیری از مجموعه های هیچ جا چگال باشد؛ در غیر این صورت E از کاتگوری دوم است. بنابر این قضیه بئر حکم می کند که هر فضای متریک کامل در خودش از کاتگوری دوم است. مترادف توصیفی تر و پیشرفته تر «کاتگوری اول» نحیف است. متمم یک مجموعه نحیف پس مانده نامیده می شود (قضیه کاتگوری بئر اغلب برای اثبات احکام وجودی مورد استفاده قرار می گیرد؛ نشان داده می شود که اشیایی دارای خاصیتی معین وجود دارند، این کار با نشان دادن این مطلب انجام می شود که مجموعه اشیایی که خاصیت مورد نظر (در یک فضای متریک مناسب) را دارند نحیف است. برای مثال، با این روش، می توان وجود توابع پیوسته ای را ثابت کرد که هیچ جا مشتق پذیر نیستند؛ تمرین ۴۲ را ببینید.

به کاربردهای قضیه کاتگوری بئر در نظریه نگاشت های خطی برمی گردیم. چند اصطلاح: اگر X و Y دو فضای توپولوژیک باشند، نگاشتی چون $f: X \rightarrow Y$ باز نامیده می شود هرگاه $f(U)$ در Y باز باشد که در آن U در X باز است. این شرط مستلزم آن است که اگر X و Y دو فضای متریک باشند و B یک گوی با مرکز $x \in X$ باشد، آنگاه $f(B)$ شامل یک گوی به مرکز $f(x)$ باشد. موضوع را به حالتی خاص می کشانیم. اگر X و Y دو فضای خطی نرم دار باشند و f خطی باشد، آنگاه f با انتقال ها و تجانس ها با هم تعویض پذیرند؛ از اینجا معلوم می شود که f باز است اگر و تنها اگر هنگامی که B یک گوی به شعاع ۱ حول 0 در X است $f(B)$ شامل گوی 0 به مرکز 0 در Y باشد.

۵.۱۰ قضیه نگاشت باز. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند. اگر $T \in L(X, Y)$ پوشا باشد، آنگاه T باز است.

برهان: فرض کنیم B_r نشاندهنده گوی (باز) به شعاع r حول o در X باشد. بنابر یادآوری‌ها، کافی است نشان دهیم که $T(B_r)$ شامل یک گوی حول o در Y است. چون $X = \bigcup_1^\infty B_n$ و T پوشا است، داریم $Y = \bigcup_1^\infty T(B_n)$. اما Y کامل است و نگاشت $y \mapsto ny$ یک همیومورفیسم از Y است که $T(B_1)$ را به $T(B_n)$ می‌نگارد، لذا قضیه بشر ایجاب می‌کند که $T(B_1)$ نتواند هیچ‌جا چگال باشد. یعنی $y_0 \in Y$ و $\epsilon > 0$ چنان وجود دارند که گوی $B(\epsilon r, y_0)$ در $\overline{T(B_1)}$ مشمول است. $y_1 = Tx_1 \in T(B_1)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\|y_1 - y_0\| < \epsilon r$ ؛ در این صورت $B(\epsilon r, y_1) \subset B(\epsilon r, y_0) \subset \overline{T(B_1)}$

لذا اگر $\|y\| < \epsilon r$

$$y = -Tx_1 + (y + y_1) \in \overline{T(-x_1 + B_1)} \subset \overline{T(B_1)}.$$

با تقسیم دو طرف بر ϵ ، نتیجه می‌گیریم که عددی چون $\epsilon > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $\|y\| < \epsilon r$ آنگاه $y \in \overline{T(B_1)}$. اگر در عبارت اخیر بتوانیم $\overline{T(B_1)}$ را با $T(B_1)$ جایگزین کنیم برهان کامل خواهد بود (یختمل با تقلیل همزمان r)؛ اکنون به این کار می‌پردازیم. از آنجا که T با تجانس‌ها تعویض‌پذیر است، نتیجه می‌گیریم اگر $\|y\| < \epsilon \cdot 2^{-n}$ آنگاه $y \in \overline{T(B_{r \cdot 2^{-n}})}$. فرض می‌کنیم $\|y\| < \frac{r}{4}$ ؛ می‌توانیم $x_1 \in B_{\frac{r}{4}}$ را چنان بیابیم که $\|y - Tx_1\| < \frac{r}{4}$ و با روند استقرایی $x_n \in B_{r \cdot 2^{-n}}$ را چنان می‌یابیم که $\|y - \sum_1^n Tx_z\| < r \cdot 2^{-n-1}$. چون X کامل است، بنابر قضیه ۵.۱، سری $\sum_1^\infty x_n$ به عضوی مثل x همگرا است. اما در این صورت $\|x\| < \sum_1^\infty r \cdot 2^{-n} = r$ و $y = Tx$ به عبارت دیگر، $y \in T(B_1)$ شامل همه y ‌هایی است که $\|y\| < \frac{r}{4}$ ، بنابر این به حکم رسیده‌ایم. ■

۵.۱۱ نتیجه. اگر X و Y دو فضای باناخ باشند و $T \in L(X, Y)$ دوسویی باشد، آنگاه T یک ایزومورفیسم است؛ یعنی $T^{-1} \in L(Y, X)$

برهان. چنانچه T دوسویی باشد، بیوستگی T^{-1} با باز بودن T هم‌ارز است. ■

برای حکم‌های آتی اصطلاحات بیشتری نیاز داریم. اگر X و Y فضاهای برداری نرم‌داری باشند و T نگاشتی خطی از X به Y باشد، نمودار T را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma(T) = \{(x, y) \in X \times Y : y = Tx\}.$$

$\Gamma(T)$ زیرفضایی از $X \times Y$ است. (البته اگر صرفاً از دیدگاه نظریه مجموعه‌ها به T و $\Gamma(T)$ بنگریم این دو را یکی خواهیم دید؛ تفاوت آن‌ها یک موضوع روانشناختی است) T را بسته گوئیم هرگاه $\Gamma(T)$ زیر فضای بسته‌ای از $X \times Y$ باشد. به‌وضوح، اگر T پیوسته باشد آنگاه T بسته است و اگر $X \times Y$ کامل باشند عکس آن نیز درست است.

۵.۱۲ قضیه نمودار بسته. اگر X و Y دو فضای باناخ باشند و $T : X \rightarrow Y$ یک نگاشت خطی بسته باشد، آنگاه T کراندار است.

برهان. فرض کنیم π_1 و π_2 نگاشت‌های تصویری از $\Gamma(T)$ بروی X و Y باشند، یعنی $\pi_1(x, Tx) = x$ و $\pi_2(x, Tx) = Tx$. به‌وضوح $\pi_1 \in L(\Gamma(T), X)$ و $\pi_2 \in L(\Gamma(T), Y)$. چون X و Y کامل هستند پس $X \times Y$ نیز کامل است و در نتیجه $\Gamma(T)$ کامل است، زیرا T بسته است. نگاشت π_1 یک دوسویی از $\Gamma(T)$ به X است، لذا بنابر نتیجه ۵.۱۱، π_1^{-1} کراندار است. اما در این صورت $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ کراندار است. ■

پیوستگی یک نگاشت خطی مانند $T : X \rightarrow Y$ به این معنا است که اگر $x_n \rightarrow x$ ، آنگاه $Tx_n \rightarrow Tx$ ، حال آنکه بسته بودن به این معنا است که اگر $x_n \rightarrow x$ و $Tx_n \rightarrow y$ ، آنگاه $y = Tx$. بنابر این اهمیت قضیه نگار بسته این است که در بررسی $Tx_n \rightarrow Tx$ وقتی $x_n \rightarrow x$ ، می‌توانیم فرض کنیم که Tx_n به چیزی همگرا است و فقط نشان دادن این مطلب لازم است که حد همان عضو سمت راست است. این موضوع خیلی از مشکلات را از پیش رو برمی‌دارد. کامل بودن X و Y به‌طور ریشه‌ای در اثبات قضیه نگاشت باز و نیز در اثبات قضیه نگار بسته به‌کار رفته است. در واقع، اگر X یا Y غیرکامل باشند، نتیجه‌گیری‌های هر دو قضیه ممکن است نادرست باشد؛ تمرین‌های ۲۹ الی ۳۱ را ببینید. آخرین حکم این بخش قضیه‌ای از قدرت جادویی تقریب است که در وضعیت‌های معینی اجازه می‌دهد برآورده‌های یکنواخت را از برآوردهای نقطه به نقطه نتیجه بگیریم.

۵.۱۳ اصل کراندار یکنواخت. فرض کنیم X و Y فضاهای برداری نرم‌داری باشند و \mathcal{A} زیرمجموعه‌ای از $L(X, Y)$ باشد. (الف) اگر به ازای هر x از زیرمجموعه‌ای غیر نحیف از X ، $\sup_{T \in \mathcal{A}} \|Tx\| < \infty$ ، آنگاه $\sup_{T \in \mathcal{A}} \|T\| < \infty$. (ب) اگر X یک فضای باناخ باشد و برای هر $x \in X$ ، $\sup_{T \in \mathcal{A}} \|Tx\| < \infty$ ، آنگاه $\sup_{T \in \mathcal{A}} \|T\| < \infty$.

برهان. فرض می‌کنیم

$$E_n = \{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{A}} \|Tx\| \leq n\} = \bigcap_{T \in \mathcal{A}} \{x \in X : \|Tx\| \leq n\}.$$

در این صورت E_n ها بسته هستند لذا تحت فرض (الف)، یکی از E_n ها باید شامل یک گوی بسته نابدهی مانند $\overline{B(r, x_0)}$ باشد. اما در این صورت $E_{2n} \supset \overline{B(r, 0)}$ زیرا اگر $\|x\| \leq r$ ، آنگاه $x + x_0 \in E_n$ و در نتیجه

$$\|Tx\| \leq \|T(x + x_0)\| + \|Tx_0\| \leq 2n.$$

به عبارت دیگر، اگر $T \in \mathcal{A}$ و $\|x\| \leq r$ ، آنگاه $\|Tx\| \leq 2n$ ، لذا $\sup_{T \in \mathcal{A}} \|T\| \leq \frac{2n}{r}$. این نامساوی، قسمت (الف) را ثابت می‌کند و بنابر قضیه کاتگوری بئر (ب) نتیجه می‌شود. ■

تمرین‌ها

(۲۷) زیرمجموعه نحیفی از \mathbb{R} وجود دارد که متمم آن دارای اندازه لبگ صفر است.

(۲۸) اگر X به جای اینکه یک فضای متری کامل باشد یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده فرض شود باز هم قضیه کاتگوری بئر درست باقی می‌ماند. (اثبات این مطلب مشابه با اثبات قضیه کاتگوری بئر است؛ گزاره ۴.۲۱ جایگزینی برای کامل بودن است.)

(۲۹) فرض کنید $Y = L^1(\mu)$ که در آن μ اندازه شمارشی روی \mathbb{N} است. به علاوه فرض کنید

$$X = \{f \in Y : \sum_1^\infty n|f(n)| < \infty\}$$

به نرم L^1 مجهز است. نشان دهید که:

(الف) X زیرفضای چگال سره‌ای از Y است؛ بنابر این X کامل نیست.

(ب) $T : X \rightarrow Y$ را با $Tf(n) = nf(n)$ تعریف کنید. در این صورت T بسته است اما کراندار نیست.

(ج) فرض کنید $S = T^{-1}$. در این صورت $S : Y \rightarrow X$ کراندار و پوشا است اما باز نیست.

(۳۰) فرض کنید $Y = C([0, 1])$ و $X = C^1([0, 1])$ هر دو به نرم یکنواخت مجهز باشند.

(الف) X کامل نیست.

(ب) نگاشت $(\frac{d}{dx}) : X \rightarrow Y$ بسته است (تمرین ۹ را ببینید) اما کراندار نیست.

(۳۱) فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند و $S : X \rightarrow Y$ یک نگاشت خطی غیرکراندار باشد. (برای وجود چنین

نگاشت‌های، بند ۵.۶ را ببینید.) فرض کنید $\Gamma(S)$ نگار S باشد که زیرفضایی از $X \times Y$ است.

(الف) $\Gamma(S)$ کامل نیست.

(ب) $T : X \rightarrow \Gamma(S)$ را با $Tx = (x, Sx)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت T بسته است اما کراندار نیست.

(ج) $T^{-1} : \Gamma(S) \rightarrow X$ کراندار و پوشا است اما باز نیست.

(۳۲) فرض کنید $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ دو نرم روی فضای برداری X باشند به طوری که $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2$. اگر X نسبت به هر دو نرم کامل باشد، آنگاه نرم‌ها هم‌ارزند.

(۳۳) آهسته‌ترین آهنگ تحلیل رفتن جملات یک سری مطلقاً همگرا وجود ندارد؛ یعنی دنباله‌ای چون $\{a_n\}$ از اعداد مثبت وجود ندارد به طوری که $\sum a_n |c_n| < \infty$ اگر و تنها اگر $\{c_n\}$ کراندار باشد. (مجموعه دنباله‌های کراندار، فضای $B(\mathbb{N})$ متشکل از توابع کراندار روی \mathbb{N} است و مجموعه دنباله‌های مطلقاً جمع‌پذیر $L^1(\mu)$ است که در آن μ اندازه شمارشی روی \mathbb{N} است. اگر یکی از چنین $\{a_n\}$ ‌هایی وجود داشته باشد، $T : B(\mathbb{N}) \rightarrow L^1(\mu)$ را در نظر می‌گیریم که با $Tf(n) = a_n f(n)$ تعریف می‌شود. مجموعه f ‌هایی که $f(n) = 0$ برای همه به جز تعدادی متناهی از آنها برقرار است در $L^1(\mu)$ چگال است اما در $B(\mathbb{N})$ چگال نیست.)

(۳۴) با مراجعه به تمرین‌های ۹ و ۱۰، پیوستگی نگاشت شمول $L^1_k([0,1])$ بتوی $L^{k-1}([0,1])$ را: (الف) با استفاده از قضیه نگار بسته نشان دهید.

(ب) با محاسبه مستقیم نشان دهید. (این تمرین برای تشریح استفاده از قضیه نمودار بسته به‌عنوان ابزاری برای سبب صرفه‌جویی در وقت و نوشتن آمده است.)

(۳۵) فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند، $T \in L(X, Y)$ و $\mathcal{N}(T) = \{x : Tx = 0\}$ و \mathcal{M} برد T باشد. در این صورت $X / \mathcal{N}(T)$ با \mathcal{M} ایزومورف است اگر و تنها اگر \mathcal{M} بسته باشد. (تمرین ۱۵ را ببینید.)

(۳۶) فرض کنید X یک فضای باناخ جدایی‌پذیر و μ اندازه شمارشی روی \mathbb{N} باشد. به علاوه، فرض کنید $\{x_n\}_1^\infty$ زیرمجموعه چگال شمارش‌پذیری از گوی باز واحد در X باشد و $T : L^1(\mu) \rightarrow X$ را با $Tf = \sum_1^\infty f(n)x_n$ تعریف کنید. (الف) T کراندار است.

(ب) T پوشا است.

(ج) X با یک فضای خارج قسمتی از $L^1(\mu)$ ایزومورف است. (تمرین ۳۵ را به‌کار ببرید.)

(۳۷) فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند. اگر $T : X \rightarrow Y$ یک نگاشت خطی باشد به طوری که به ازای هر $f \in Y^*$ ، $f \circ T \in X^*$ ، آنگاه T کراندار است.

(۳۸) فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند و $\{T_n\}$ دنباله‌ای در $L(X, Y)$ باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$ ، $\lim T_n x$ وجود داشته باشد. فرض کنید $Tx = \lim T_n x$ ؛ در این صورت $T \in L(X, Y)$.

(۳۹) فرض کنیم X, Y و Z سه فضای باناخ باشند و $B : X \times Y \rightarrow Z$ یک نگاشت دو خطی جداگانه پیوسته باشد؛ یعنی به ازای هر $x \in X$ ، $B(x, \cdot) \in L(Y, Z)$ و به ازای $y \in Y$ ، $B(\cdot, y) \in L(X, Z)$. در این صورت B مشترکاً پیوسته است، یعنی از $X \times Y$ به Z پیوسته است. (مسئله را به اثبات این مطلب تقلیل دهید که به ازای عددی $C > 0$ ، $\|B(x, y)\| \leq C \|x\| \|y\|$)

(۴۰) (اصل تراکم تکین‌ها) فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند و $\{T_{jk} : j, k \in \mathbb{N}\} \subset L(X, Y)$. به علاوه، فرض کنید به ازای هر k عضوی مانند $x (x \in X)$ وجود دارد به طوری که به ازای هر k ، $\sup \{\|T_{jk} x\| : j \in \mathbb{N}\} = \infty$.
در این صورت x ای (در واقع، مجموعه‌ی پس‌مانده‌ای از x ها) وجود دارد به طوری که برای هر k ، $\sup \{\|T_{jk} x\| : j \in \mathbb{N}\} = \infty$.

(۴۱) فرض کنید X یک فضای برداری با بعد شمارش پذیر نامتناهی باشد (یعنی، هر عضو X یک ترکیب خطی متناهی از اعضای یک مجموعه مستقل خطی شمارش پذیر نامتناهی است). هیچ نرمی روی X وجود ندارد که نسبت به آن X کامل باشد. (نرمی روی X مفروض گرفته و قسمت (ب) از تمرین ۱۸ و قضیه کاتگوری بئر را به کار برید.)

(۴۲) فرض کنید E_n مجموعه همه توابعی چون $f \in C([0, 1])$ باشد که برای آن نقطه‌ای چون $x_0 \in [0, 1]$ ، x_0 ، وابسته به f وجود دارد به طوری که به ازای $x \in [0, 1]$ ،

$$|f(x) - f(x_0)| \leq n|x - x_0|.$$

الف) E_n در $C([0, 1])$ هیچ‌جا چگال است. (هر تابع حقیقی $f \in C([0, 1])$ را با یک تابع خطی قطعه‌ای مانند g می‌توان به طور یکنواخت تقریب زد تعداد قطعات خطی g متناهی است و دارای شیبی مابین $\pm 2n$ است. اگر $\|h - g\|_\infty$ به قدر کافی کوچک باشد، آنگاه $h \notin E_n$.)

ب) مجموعه توابع هیچ‌جا مشتق پذیر در $C([0, 1])$ یک مجموعه پس مانده است.

۵.۴ فضاهای برداری توپولوژیک

در نظر گرفتن توپولوژی‌هایی فضاهای برداری به غیر از آنهایی که به وسیلهٔ نرم تعریف می‌شوند بسیار مفید است، تنها نیاز مبرم این است که توپولوژی نسبت به عملگرهای برداری خوش رفتار باشد. به طور دقیق تر، یک فضای برداری توپولوژیک فضایی برداری مانند X روی میدانی مانند $(\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C})$ است که مجهز به یک توپولوژی است به طوری که نگاشت‌های $(x, y) \rightarrow x + y$ و $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ از $X \times X$ و $X \times X$ به X پیوسته اند. یک فضای برداری توپولوژیک موضوعاً محدب نامیده می‌شود هرگاه پایه‌ای برای توپولوژی آن پایه‌ای وجود داشته باشد که فقط از مجموعه‌های محدب تشکیل شده باشد (یعنی، از مجموعه‌هایی چون A تشکیل شده باشد به طوری که اگر $x, y \in A$ ، آنگاه به ازای هر $0 < t < 1$ ، $(1-t)y + tx \in A$). اکثر فضاهای برداری توپولوژیک که در تمرین‌ها به آنها برخورد خواهید خورد موضوعاً محدب و هاسدورف هستند.

رایج‌ترین روش برای تعریف توپولوژی‌های موضوعاً محدب روی فضاهای برداری، تعریف برحسب نیم‌نرم‌ها است. یعنی، اگر خانواده‌ای از نیم‌نرم‌ها روی X داشته باشیم، به همان روشی که از گوی‌های تعریف شده توسط توپولوژی حاصل از نرم روی یک فضای برداری به عنوان مجموعه‌های باز استفاده می‌کردیم می‌توانیم از «گوی‌ها»ی که این نیم‌نرم‌ها تعریف می‌کنند برای تولید یک توپولوژی استفاده کنیم. حکم دقیق به صورت زیر است:

۵.۱۴ قضیه. فرض کنیم $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ خانواده‌ای از نیم‌نرم‌ها روی فضای برداری X باشد. اگر $\alpha \in A$ و $\varepsilon > 0$ ، قرار می‌دهیم

$$U_{x\alpha\varepsilon} = \{y \in X : p_\alpha(y - x) < \varepsilon\},$$

و فرض می‌کنیم T توپولوژی تعریف شده به وسیلهٔ مجموعه‌های $U_{x\alpha\varepsilon}$ باشد.

(الف) به ازای هر $x \in X$ ، اشتراک‌های متناهی از مجموعه‌های $U_{x\alpha\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0, \alpha \in A$) یک پایهٔ همسایه‌ای در x تشکیل می‌دهند.

(ب) اگر $(x_i)_{i \in I}$ یک تور در X باشد، آنگاه $x_i \rightarrow x$ اگر و تنها اگر به ازای هر $\alpha \in A$ ، $p_\alpha(x_i - x) \rightarrow 0$.

(ج) (X, T) یک فضای برداری توپولوژیک موضوعاً محدب است.

برهان. (الف) اگر $x \in \bigcap_1^k U_{x_j \alpha_j \varepsilon_j}$ ، قرار می‌دهیم $\delta_j = \varepsilon_j - p_{\alpha_j}(x - x_j)$. بنابر نامساوی مثلثی، داریم

$$x \in \bigcap_1^k U_{x_j \alpha_j \delta_j} \subset \bigcap_1^k U_{x_j \alpha_j \varepsilon_j}.$$

بنابر این حکم از گزارهٔ ۴.۴ نتیجه می‌شود.

(ب) با توجه به (الف)، کافی است ملاحظه کنیم که $p_\alpha(x_i - x) \rightarrow 0$ اگر و تنها اگر $\langle x_i \rangle$ به ازای هر $\varepsilon > 0$ نهایتاً در $U_{x\alpha\varepsilon}$ باشد.

(ج) پیوستگی اعمال برداری به آسانی از گزاره ۴.۱۹ و قسمت (ب) نتیجه می‌شود. در واقع، اگر $x_i \rightarrow x$ و $y_i \rightarrow y$ ، آنگاه

$$p_\alpha((x_i + y_i) - (x + y)) \leq p_\alpha(x_i - x) + p_\alpha(y_i - y) \rightarrow 0$$

و لذا $x_i + y_i \rightarrow x + y$. همچنین اگر $\lambda_i \rightarrow \lambda$ ، آنگاه حتماً $|\lambda_i| \leq C = |\lambda| + 1$ ، لذا

$$p_\alpha(\lambda_i x_i - \lambda x) \leq p_\alpha(\lambda_i(x_i - x)) + p_\alpha((\lambda_i - \lambda)x) \leq Cp_\alpha(x_i - x) + |\lambda_i - \lambda|p_\alpha(x),$$

پس نتیجه می‌شود که $\lambda_i x_i \rightarrow \lambda x$ ؛ به علاوه، مجموعه‌های $U_{x\alpha\varepsilon}$ محدب هستند زیرا اگر $y, z \in U_{x\alpha\varepsilon}$ ، آنگاه

$$p_\alpha(x - [ty + (1-t)z]) \leq p_\alpha(tx - ty) + p_\alpha((1-t)x - (1-t)z) < t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon.$$

بنابر این محدب موضعی توپولوژی از (الف) حاصل می‌شود. ■

اینک مشابهی برای گزاره ۵.۲ می‌آوریم.

۵.۱۵ گزاره. فرض کنیم X و Y دو فضای برداری به ترتیب با توپولوژی‌های تعریف شده به وسیله خانواده‌های $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ و $\{q_\beta\}_{\beta \in B}$ از نیم‌نرم‌ها باشند و $T: X \rightarrow Y$ یک نگاشت خطی باشد. در این صورت T پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر $\beta \in B$ اعضای چون $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in A$ و عددی مانند $C > 0$ وجود داشته باشند به طوری که

$$q_\beta(Tx) \leq C \sum_{j=1}^k p_{\alpha_j}(x).$$

برهان. اگر شرط اخیر برقرار باشد و $\langle x_i \rangle$ یک تور همگرا به $x \in X$ باشد، آنگاه طبق قسمت (ب) از قضیه ۵.۱۴ به ازای هر α داریم $p_\alpha(x_i - x) \rightarrow 0$ ، در نتیجه به ازای هر $\beta \in B$ ، بنابر این $q_\beta(Tx_i - Tx) \rightarrow 0$. بنابر گزاره ۴.۱۹، T پیوسته است. به عکس، اگر T پیوسته باشد، به ازای هر $\beta \in B$ یک همسایگی مانند U از 0 در X وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in U$ ، $q_\beta(Tx) < 1$. بنابر قسمت (الف) از قضیه ۵.۱۴ می‌توان فرض کرد که

$U = \bigcap_{j=1}^k U_{\alpha_j \varepsilon_j}$ فرض می‌کنیم $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ ؛ در این صورت، اگر به ازای همه j ها، $p_{\alpha_j}(x) < \varepsilon$ ، آنگاه $q_\beta(Tx) < 1$ اینک برای عضو مفروض x از X دو امکان وجود دارد. اگر به ازای یک j ، $p_{\alpha_j}(x) > 0$ ، قرار

$$y = \frac{\varepsilon x}{\sum_{j=1}^k p_{\alpha_j}(x)}$$

می‌دهیم. در این صورت به ازای هر j ، $p_{\alpha_j}(y) \leq \varepsilon$ ، لذا

$$q_\beta(Tx) = \sum_{j=1}^k \varepsilon^{-1} p_{\alpha_j}(x) q_\beta(Ty) \leq \varepsilon^{-1} \sum_{j=1}^k p_{\alpha_j}(x).$$

از طرف دیگر، اگر به ازای هر j ، $p_{\alpha_j}(x) = 0$ ، آنگاه به ازای هر j و هر $r > 0$ ، $p_{\alpha_j}(rx) = 0$ ، در نتیجه به ازای هر

$$q_\beta(Tx) = 0, r q_\beta(Tx) = q_\beta(T(rx)) < 1, r > 0$$

$$q_\beta(Tx) \leq \varepsilon^{-1} \sum_1^k p_{\alpha_j}(x)$$

و برهان کامل می‌شود. ■

برهان گزاره زیر به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۴۳).

۵.۱۶ گزاره فرض کنیم X یک فضای برداری مجهز به توپولوژی تعریف شده با خانواده‌ای از نیم نرم‌ها مانند $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ باشد.

(الف) X هاسدورف است اگر و تنها اگر برای هر $x \neq 0$ عضوی مانند $\alpha \in A$ وجود داشته باشد به طوری که $p_\alpha(x) \neq 0$.

(ب) اگر X هاسدورف و A شمارش پذیر باشد، آنگاه X متریک پذیر با یک متر حافظ انتقال است (یعنی، به ازای هر x, y و z از X ، $\rho(x, y) = \rho(x + z, y + z)$).

اگر X دارای توپولوژی تعریف شده با نیم نرم‌های $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ باشد، آنگاه بنابر گزاره ۵.۱۵، یک تابع خطی مانند f روی X پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای عددی مانند $C > 0$ و اعضای مانند $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in A$ ، $\|f(x)\| \leq C \sum_1^k p_{\alpha_j}(x)$ از آنجا که یک مجموع متناهی از نیم نرم‌ها باز هم یک نیم نرم است، قضیه هان-باناخ وجود تابع های خطی پیوسته زیادی روی X را تضمین می‌کند. اگر X هاسدورف باشد، کافی است نقاط جدا شوند. مثل قبل، مجموعه همه چنین تابع های خطی با X^* نشان داده می‌شود. روش های مختلفی برای تبدیل X^* به یک فضای برداری توپولوژیک وجود دارند، اما به طور اصولی به این پرسش نخواهیم پرداخت. ساده ترین راه نهادن توپولوژی ضعیف تری است که همه نگاشت های ارزیابی $f \mapsto f(x)$ ($x \in X$) را پیوسته کند ایده ای است که پس از این بارها و بارها مورد کند و کاو قرار خواهد گرفت.

در یک فضای توپولوژیک مانند X مفهوم دنباله کشی یا تور کشی قابل بیان است. یعنی یک تور مانند $(x_i)_{i \in I}$ در X کشی نامیده می‌شود هرگاه تور $(x_i)_{i \in I}$ به صفر همگرا باشد (در اینجا $I \times I$ به روش معمولی جهت دار شده است: $(i', j') \leq (i, j)$ اگر و تنها اگر $i' \leq i$ و $j' \leq j$). طبیعتاً، X کامل نامیده می‌شود هرگاه هر تور کشی همگرا باشد. وقتی X شمارش پذیر اول باشد، کامل بودن X خیلی جالب است، در این حالت کامل بودن با این شرط هم ارز است که هر دنباله کشی همگرا است (تمرین ۴۴). حالت بسیار خاص این است که اگر X هاسدورف باشد، آنگاه بنابر قسمت (الف) از قضیه ۵.۱۴، این توپولوژی شمارش پذیر است؛ در واقع، بنابر قسمت (ب) از گزاره ۵.۱۶، توپولوژی مذکور با یک متر حافظ انتقال مانند ρ داده می‌شود و یک دنباله مطابق با تعریف کنونی کشی است اگر و تنها اگر نسبت به ρ کشی باشد. فضای برداری

توپولوژیک هاسدورف کاملی که توپولوژی آن به وسیله خانواده‌ای شمارش پذیر از نیم نرم‌ها تعریف شود یک فضای فرشه نامیده می‌شود.

اکنون مثال‌های جالبی از فضاهای برداری توپولوژیک را مدنظر قرار می‌دهیم که توپولوژی آنها با خانواده‌ای از نیم نرم‌ها به جز نرم‌های تکی تعریف می‌شوند. قبلاً در فصل‌های گذشته با یک زوج از آنها برخورد کرده‌ایم:

- فرض کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد. در C^X توپولوژی همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده با نیم نرم‌های $p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$ وقتی K روی زیرمجموعه‌های فشرده X تغییر می‌کند تعریف می‌شود. اگر X, σ فشرده باشد و $\{U_n\}$ همانند گزاره‌های ۴.۳۹ و ۴.۴۰ باشد، این توپولوژی به وسیله نیم نرم‌های $p_n(f) = \sup_{x \in U_n} |f(x)|$ تعریف می‌شود. به آسانی دیده می‌شود که در این حالت C^X کامل است و لذا یک فضای فرشه می‌باشد؛ حال بنابر گزاره ۴.۳۸، $C(X)$ نیز یک فضای فرشه است.

- فضای $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ که در بند ۳.۴ تعریف شد یک فضای فرشه با توپولوژی تعریف شده به وسیله نیم نرم‌های زیر است:

$$p_k(f) = \int_{|x| \leq k} |f(x)| dx$$

(کامل بودن این فضا به آسانی از کامل بودن L^1 نتیجه می‌شود.) تعمیم واضحی از این ساختار، فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدبمانند، $L^1_{loc}(X, \mu)$ به دست می‌دهد که در آن X فضای هاسدورف موضعاً فشرده دل‌خواه و μ اندازه برلی روی X است که روی مجموعه‌های فشرده متناهی است.

رده دیگری از فضاهای برداری توپولوژیک به‌طور طبیعی با نظریه معادلات دیفرانسیل در ارتباط هستند. بیشتر مطالعه عملگر $\frac{d}{dx}$ یا عملگرهای پیچیده‌تر برگرفته از آن مدنظر است که روی فضاهای مختلفی از توابع اثر می‌کنند. متأسفانه به‌طور

ذاتی تعریف نرم‌هایی روی بیشتر فضاهای توابع با بعد متناهی طوری که $\frac{d}{dx}$ یک عملگر کراندار باشد ممکن نیست. حکم دقیقی در این رابطه وجود دارد؛ هیچ نرمی روی $C^\infty([0, 1])$ متشکل از توابع بینهایت بار مشتق پذیر روی $[0, 1]$ وجود ندارد که نسبت به آن $\frac{d}{dx}$ کراندار باشد. در واقع اگر $f_\lambda(x) = e^{\lambda x}$ ، آنگاه $(\frac{d}{dx})f_\lambda = \lambda f_\lambda$ لذا به ازای هر λ ، $\|\frac{d}{dx}\| \geq |\lambda|$ و فرقی نمی‌کند که چه نرمی روی $C^\infty([0, 1])$ به کار رفته باشد.

از این مشکل، سه بند مفید آموخته می‌شود. اول اینکه، می‌توان مشتقگیری را به عنوان یک عملگر غیر کراندار از X به Y در نظر گرفت که در آن Y یک فضای باناخ مناسب و همانند تمرین ۳۰، X یک زیرفضای چگال Y است. دوم اینکه می‌توان مشتقگیری را به عنوان نگاشت خطی کرانداری از یک فضای باناخ مانند X به یک فضای متمایز مانند Y (از قبیل $C^k([0, 1])$ و $Y = C^k([0, 1])$ در تمرین ۹) در نظر گرفت. بالاخره می‌توان مشتقگیری را به عنوان عملگری پیوسته روی یک فضای موضعاً محدب مانند X در نظر گرفت که توپولوژی آن با یک نرم داده نمی‌شود. همه این نقطه نظرات مورد استفاده منحصر به خود را

دارند، اما آنکه در اینجا به کارمان می آید نکته آخر است. به آسانی خانواده‌های از نیم‌نرم‌ها روی فضاهای توابع هموار ساخته می‌شود به طوری که عملگر مشتقگیری تقریباً با تعریف پیوسته می‌شود. به عنوان مثال، نیم‌نرم‌های $(k = 0, 1, 2, \dots)$ $p_k(f) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f^{(k)}(x)|$ فضای $C^\infty([0, 1])$ را به یک فضای فرشه تبدیل می‌کنند (کامل بودن این فضا مانند تمرین ۹ ثابت می‌شود)، و بنا بر گزاره ۵.۱۵، روی این فضا پیوسته است زیرا $p_k(f') = p_{k+1}(f)$. مثال‌های دیگری در تمرین ۴۵ و در فصل ۹ تعبیه شده‌اند.

یکی از سودمندترین روال‌ها برای ساختن توپولوژی روی فضاهای برداری قید پیوستگی نگاشت‌های خطی معینی است. یعنی، فرض می‌کنیم X یک فضای برداری، Y یک فضای خطی نرم‌دار و $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ گردایه‌ای از نگاشت‌های خطی از X به Y باشد. در این صورت توپولوژی ضعیف T که با $\{T_\alpha\}$ تولید می‌شود X را به یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب تبدیل می‌کند. در واقع دقیقاً توپولوژی T' است که مطابق با قضیه ۵.۱۴ با نیم‌نرم‌های $p_\alpha(x) = \|T_\alpha x\|$ ساخته می‌شد. (T) توسط مجموعه‌های به شکل $\{x : \|T_\alpha x - y_0\| < \varepsilon\}$ با شرط $y_0 \in Y$ تولید می‌شود، حال آنکه T' به وسیله مجموعه‌های به شکل $\{x : \|T_\alpha x - T_\alpha x_0\| < \varepsilon\}$ با شرط $x_0 \in X$ تولید می‌شود. اگر T_α ها پوشا باشند، به وضوح اینها یکی هستند؛ حالت کلی تحت عنوان تمرین ۴۶ باقی می‌ماند. توپولوژی روی $C^\infty([0, 1])$ که در پاراگراف قبل ذکر شد مثالی از همین نحوه ساخت است که در آن $Y = C([0, 1])$ و $T_k f = f^{(k)}$. اینک مثال‌های بیشتری ارائه می‌دهیم. نخست، فرض می‌کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار باشد. به طور خلاصه توپولوژی ضعیف تولید شده به وسیله X^* به توپولوژی ضعیف روی X مشهور است همگرایی نسبت به این توپولوژی به همگرایی ضعیف شهرت دارد. بنا بر این، اگر (x_α) یک تور X باشد، آنگاه $x \rightarrow x_\alpha$ به طور ضعیف اگر و تنها اگر به ازای هر $f \in X^*$ ، $f(x_\alpha) \rightarrow f(x)$ ، وقتی X با بعد نامتناهی است، توپولوژی ضعیف همیشه از توپولوژی نرمی ضعیف‌تر است؛ تمرین ۴۹ را ببینید.

اینک، فرض می‌کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار و X^* فضای دوگان آن باشد. همانند تعریف فوق، توپولوژی ضعیف روی X^* توپولوژی تعریف شده با X^{**} است؛ توپولوژی جالب‌تر توپولوژی تولید شده توسط X (به عنوان زیرفضایی از X^{**}) است که W^* - توپولوژی روی X^* نامیده می‌شود. X^* فضایی مرکب از توابع روی X است و به طور خلاصه W^* - توپولوژی، توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه است: $f \rightarrow f_\alpha$ اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$ ، $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$ - توپولوژی حتی از توپولوژی ضعیف روی X^* هم ضعیف‌تر است؛ وقتی X بازتابی باشد دو توپولوژی مذکور دقیقاً برهم منطبق می‌شوند.

بالاخره، فرض می‌کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند. آن توپولوژی روی $L(X, Y)$ که به وسیله نگاشت‌های ارزیابی $Tx \mapsto T(x)$ تولید می‌شود توپولوژی عملگری قوی روی $L(X, Y)$ نامیده می‌شود و توپولوژی تولید شد توسط تابعک‌های خطی $(f \in Y^*, x \in X) T \mapsto f(Tx)$ توپولوژی عملگری ضعیف روی $L(X, Y)$ خوانده می‌شود. باز هم این توپولوژی‌ها بر حسب همگرایی بهتر درک می‌شوند: $T_\alpha \rightarrow T$ به طور قوی اگر و تنها اگر نسبت به توپولوژی نرمی Y ، به ازای هر $x \in X$ ، $T_\alpha x \rightarrow Tx$ در حالی که $T_\alpha \rightarrow T$ به طور ضعیف اگر و تنها اگر نسبت به توپولوژی ضعیف Y ، به ازای

هر $T_\alpha x \rightarrow Tx, x \in X$ بنا بر این توپولوژی عملگری قوی از توپولوژی عملگری ضعیف قوی تر است اما از توپولوژی نرمی روی $L(X, Y)$ ضعیف تر است.

حکم زیر در مورد همگرایی قوی تقریباً بدیهی اما بینهایت سودمند است:

۵.۱۷ گزاره. فرض کنیم $\{T_n\}_1^\infty \subset L(X, Y), \sup_n \|T_n\| < \infty$ و $T \in L(X, Y)$. اگر به ازای هر x واقع در زیرمجموعه چگالی مانند D از X , $\|T_n x - Tx\| \rightarrow 0$ ، آنگاه $T_n \rightarrow T$ به طور قوی.

برهان. فرض می کنیم $C = \sup\{\|T\|, \|T_1\|, \|T_2\|, \dots\}$ و $\varepsilon > 0$ را مفروض گرفته و عضوی چون

$x' \in D$ را چنان انتخاب می کنیم که $\|x - x'\| < \frac{\varepsilon}{4C}$ اگر n به قدر کافی بزرگ باشد که $\|T_n x' - Tx'\| < \frac{\varepsilon}{4}$ داریم:

$$\begin{aligned} \|T_n x - Tx\| &\leq \|T_n x - T_n x'\| + \|T_n x' - Tx'\| + \|Tx' - Tx\| \\ &\leq \|T_n\| \|x - x'\| + \frac{\varepsilon}{4} + \|Tx' - Tx\| \\ &\leq 2C \|x - x'\| + \frac{1}{4}\varepsilon < \varepsilon, \end{aligned}$$

لذا $T_n x \rightarrow Tx$ $x \in X$

آخرین حکم این بخش یک قضیه فشردگی است که یکی از علل اصلی سودمند بودن W^* - توپولوژی روی یک فضای دوگان است. ایده اثبات شبیه تکنیک‌های مطرح شده در بند ۴.۸ است.

۵.۱۸ قضیه لا اغلو. اگر فضای برداری نرم داری باشد، گوی واحد بسته $\{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$ در B^* نسبت به W^* - توپولوژی فشرده است.

به سبب دوگانگی لانه‌ناختره

برهان. به ازای هر $x \in X$ فرض می کنیم $D_x = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|x\|\}$ و قرار می دهیم $D = \prod_{x \in X} D_x$. در

این صورت بنا بر قضیه تیخونف D فشرده است. اعضای D دقیقاً توابع با مقدار مختلط ϕ روی X هستند که به ازای هر $x \in X, |\phi(x)| \leq \|x\|$ و B^* مشتمل بر اعضای D است که خطی هستند. به علاوه، توپولوژی‌های مربوطه‌ای که B^* از توپولوژی حاصلضربی روی D و W^* - توپولوژی روی X^* به ارث می برد هر دو بر توپولوژی همگرایی نقطه به نقطه منطبق هستند، بنا بر این کافی است ببینیم که B^* در D بسته است. اما این کار آسانی است: اگر (f_α) یک تور در B^* باشد که به عضو f از D همگرا است، آنگاه به ازای هر $x, y \in X$ و هر $a, b \in \mathbb{C}$ داریم:

$$f(ax + by) = \lim f_\alpha(ax + by) = \lim[af_\alpha(x) + bf_\alpha(y)] = af(x) + bf(y)$$

لذا $f \in B^*$

(هشدار: قضیه آلا آگلو ایجاب نمی‌کند که X^* با W^* - توپولوژی موضعاً فشرده باشد؛ قسمت (ب) از تمرین ۴۹ را ببینید.)

تمرین‌ها

(۴۳) گزاره ۵.۱۶ را ثابت کنید. (برای قسمت (ب)، مانند قسمت (د) از تمرین ۵۶ از بند ۵.۴ عمل کنید.)

(۴۴) اگر X یک فضای برداری توپولوژیک شمارش‌پذیر اول و هر دنباله‌ی کشی در X همگرا باشد، آنگاه هر تورکشی در X همگرا است.

(۴۵) فضای $C^\infty(\mathbb{R})$ مرکب از همه توابع بینهایت بار مشتق‌پذیر روی \mathbb{R} دارای یک توپولوژی فضای فرشه است که نسبت به $f_n \rightarrow f$ اگر و تنها اگر روی مجموعه‌های فشرده به ازای هر $k, k \geq 0$ ، $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ به‌طور یکنواخت.

(۴۶) اگر X یک فضای برداری، Y یک فضای خطی نرم‌دار، T توپولوژی ضعیف تولید شده با خانواده‌ای از نگاشت‌های خطی مانند $\{T_\alpha : X \rightarrow Y\}$ روی X باشد و T' توپولوژی تولید شده با نیم‌نرم‌های $\{\|T_\alpha x\|\}$ ، آنگاه $T = T'$.

(۴۷) فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند.

الف) اگر $\{T_n\}_1^\infty \subset L(X, Y)$ و $T_n \rightarrow T$ به‌طور ضعیف (یا قوی)، آنگاه $\sup_n \|T_n\| < \infty$.

ب) هر دنباله‌ی همگرایی ضعیف در X و هر دنباله‌ی W^* - همگرا در X^* (نسبت به نرم) کراندار است.

(۴۸) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد.

الف) گوی واحد نرم - بسته $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ به‌طور ضعیف نیز بسته است. (قسمت (د) از قضیه ۵.۸ را به کار برید.)

ب) اگر $E \subset X$ (نسبت به نرم) کراندار باشد، بستار ضعیف آن نیز کراندار است.

ج) اگر $F \subset X^*$ (نسبت به نرم) کراندار باشد، W^* - بستار آن نیز کراندار است.

د) هر دنباله‌ی W^* - کشی در X^* همگرا است. (تمرین ۳۸ را به کار برید.)

(۴۹) فرض کنید X یک فضای باناخ با بعد نامتناهی باشد.

الف) هر مجموعه‌ی باز ضعیف ناتهی در X و هر مجموعه‌ی W^* - باز ناتهی در X^* ، (نسبت به نرم) کراندار است.

- (ب) هر زیرمجموعه کراندار از X تحت توپولوژی ضعیف، هیچ‌جا چگال است و هر زیرمجموعه کراندار X^* نسبت به W^* - توپولوژی هیچ‌جا چگال است. (قسمت‌های (ب) و (ج) از تمرین ۴۸ را به کار برید.)
- (ج) X نسبت به توپولوژی ضعیف در خودش و X^* نسبت به W^* - توپولوژی در خودش نحیف است.
- (د) W^* - توپولوژی روی X^* به وسیله هیچ‌متر حافظ انتقالی تعریف نمی‌شود. (قسمت (د) از تمرین ۴۸ را به کار برید.)

(۵۰) اگر X فضای خطی نرم‌دار جدایی‌پذیری باشد، آنگاه W^* - توپولوژی روی گوی واحد بسته در X^* شمارش‌پذیر دوم و در نتیجه مترپذیر است. (اما به قسمت (د) از تمرین ۴۹ مراجعه کنید.)

(۵۱) یک زیرفضای برداری از فضای برداری نرم‌داری چون X نرم - بسته است اگر و تنها اگر به‌طور ضعیف بسته باشد. (اما یک زیرفضای نرم بسته X لزوماً W^* - بسته نیست مگر اینکه X بازتابی باشد؛ قسمت (د) از تمرین ۵۲ را ببینید.)

(۵۲) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد و f_1, \dots, f_n اعضای مستقل خطی از X^* باشند.

(الف) $T : X \rightarrow \mathbb{C}^n$ را با $Tx = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ تعریف کنید. اگر $\mathcal{M} = \{x : Tx = 0\}$ و $\mathcal{N} = \{x : Tx = 0\}$ زیرفضای پدید آمده توسط f_1, \dots, f_n باشند، آنگاه به مفهوم تمرین ۲۳، $\mathcal{M} = \mathcal{N}^\circ$ و در نتیجه \mathcal{M}^* بنا $(X/\mathcal{N})^*$ آیزومورف است.

(ب) اگر $F \in X^{**}$ ، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عضوی چون $x \in X$ وجود دارد به طوری که به ازای $j = 1, \dots, n$ ، $F(f_j) = f_j(x)$ و $\|F\| \leq (1 + \varepsilon)\|x\|$. $F|_{\mathcal{M}}$ را می‌توان با عضوی از $(X/\mathcal{N})^{**}$ و در نتیجه با عضوی از X/\mathcal{N} یکی گرفت زیرا فضای اخیر با بعد متناهی است.

(ج) چنانچه X به‌عنوان زیرفضایی از X^{**} در نظر گرفته شود، توپولوژی نسبی روی X که از W^* - توپولوژی روی X^{**} القاء می‌شود توپولوژی ضعیف است.

(د) X با W^* - توپولوژی روی X^{**} چگال است و گوی واحد بسته در X درگویی واحد بسته در X^{**} چگال است.

(ه) X بازتابی است اگر و تنها اگر گوی واحد بسته‌اش فشردۀ ضعیف باشد.

(۵۳) فرض کنید X یک فضای باناخ باشد و $\{T_n\}$ و $\{S_n\}$ دنباله‌هایی در $L(X, X)$ باشند به طوری که $T_n \rightarrow T$ به طوری قوی و $S_n \rightarrow S$ به‌طور قوی.

(الف) اگر $\{x_n\} \subset X$ و $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ، آنگاه $\|T_n x_n - Tx\| \rightarrow 0$. (قسمت (الف) از تمرین ۴۷ را به کار برید.)

(ب) $T_n S_n \rightarrow TS$ به طوری قوی.

۵.۵ فضاهای هیلبرت

مهمترین فضاهای باناخ و از جمله آنهایی که می‌توان آنالیز بسیار دقیق را روی آن انجام داد فضاهای هیلبرت هستند که تعمیم مستقیمی از فضاهای اقلیدسی با بعد متناهی می‌باشند. قبل از تعریف آنها اندکی مباحث مقدماتی لازم داریم. فرض کنیم \mathcal{H} یک فضای برداری مختلط باشد. یک ضرب داخلی (یا ضرب اسکالر) روی \mathcal{H} نگاشتی چون $\langle x, y \rangle \mapsto \langle x, y \rangle$ از $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ به \mathbb{C} است به طوری که:

$$\text{(الف) به ازای هر } x, y, z \text{ از } \mathcal{H} \text{ و هر } a \text{ و } b \text{ از } \mathbb{C}, \langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle.$$

$$\text{(ب) به ازای هر } x \text{ و } y \text{ از } \mathcal{H}, \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}.$$

$$\text{(ج) به ازای هر عضو ناصفر مانند } x \text{ از } \mathcal{H}, \langle x, x \rangle \in (0, \infty).$$

ملاحظه می‌کنیم که (الف) و (ب) ایجاب می‌کنند که به ازای هر x, y, z از \mathcal{H} و هر a و b از \mathbb{C} ,

$$\langle x, ay + bz \rangle = \bar{a}\langle x, y \rangle + \bar{b}\langle x, z \rangle.$$

(می‌توان روی فضاهای برداری حقیقی نیز ضرب داخلی تعریف کرد: در این صورت $\langle x, y \rangle$ حقیقی است، a و b در (الف)

حقیقی فرض می‌شوند و (ب) به صورت $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$ در می‌آید.)

هر فضای برداری مختلط مجهز به یک ضرب داخلی یک فضای پیش‌هیلبرت نامیده می‌شود. اگر \mathcal{H} یک فضای پیش

هیلبرت باشد، به ازای $x \in \mathcal{H}$ تعریف می‌کنیم:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

۵.۱۹ نامساوی سوارتز: به ازای هر $x, y \in \mathcal{H}$, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که x و y وابسته خطی باشند.

برهان. اگر $\langle x, y \rangle = 0$ ، حکم واضح است. اگر $\langle x, y \rangle \neq 0$ (و به ویژه $y \neq 0$)، قرار می‌دهیم $\alpha = \text{sgn}\langle x, y \rangle$ و

$$z = \alpha y, \quad \langle z, x \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \|z\| = \|y\|. \quad \text{در نتیجه به ازای هر } t \in \mathbb{R} \text{ داریم:}$$

$$0 \leq \langle x - tz, x - tz \rangle = \|x\|^2 - 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2.$$

عبارت طرف راست یک تابع درجه دوم از متغیر t است که مینیمم مطلق آن در $t = \|y\|^{-2} \langle x, y \rangle$ رخ می‌دهد. t را

مساوی این مقدار قرار می‌دهیم و به دست می‌آوریم:

$$0 \leq \|x - tz\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^{-2} \langle x, y \rangle^2$$

که تساوی فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که $x - tz = x - \alpha ty = 0$ که از این هم فوراً حکم مطلوب حاصل می‌شود. ■

۵.۲۰ گزاره. تابع $\|x\| \mapsto x$ یک نرم زوی \mathcal{H} است.

برهان. از تعریف واضح است که $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$ و $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ مانند آنچه در نامساوی مثلثی داریم، داریم:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

پس بنابر نامساوی شوارتز،

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

و برهان کامل می‌شود. ■

فضای پیش‌هیلبرتی که نسبت به نرم $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ کامل باشد یک فضای هیلبرت نامیده می‌شود. (فضاهای هیلبرت حقیقی با ضرب داخلی حقیقی را نیز می‌توان عنوان کرد. اما فضاهای هیلبرت معمولاً مختلط فرض می‌شوند مگر آنکه مختلط نبودن آن به صراحت مشخص شود.)

مثال: فرض کنیم (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای اندازه و $L^1(\mu)$ مجموعه همه توابع اندازه‌پذیری چون $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ باشد به طوری که $\int |f| d\mu < \infty$ (که در آن، مثل همیشه دو تابع تقریباً همه‌جا برابر را یکی گرفته‌ایم). از اینکه نامساوی

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

برای هر $a, b \geq 0$ معتبر است دیده می‌شود که اگر $f, g \in L^1(\mu)$ ، آنگاه

$$|f\bar{g}| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$$

لذا $f\bar{g} \in L^1(\mu)$ به آسانی معلوم می‌شود که فرمول

$$\langle f, g \rangle = \int f\bar{g} d\mu$$

یک ضرب داخلی روی $L^1(\mu)$ تعریف می‌کند. در حقیقت، به ازای هر اندازه دل‌خواه مانند μ فضای $L^1(\mu)$ یک فضای هیلبرت است. کامل بودن $L^1(\mu)$ را در قضیه ۶.۶ ثابت خواهیم کرد؛ در حال حاضر این حکم را می‌پذیریم.

با در نظر گرفتن اندازه شماری μ روی $(A, \mathcal{P}(A))$ ، که در آن A مجموعه‌ای ناتهی است حالت خاص مهمی از ساختار مذکور به دست می‌آید؛ در این حالت، معمولاً $L^1(\mu)$ با $l^1(A)$ نشان داده می‌شود. بنابراین $l^1(A)$ مجموعه توابع

$f: A \rightarrow \mathbb{C}$ است به طوری که $\sum_{\alpha \in A} |f(\alpha)| < \infty$ (با همان تعریف بند ۵.۵) متناهی باشد. بهتر است کامل بودن $l^1(A)$

به طور مستقیم اثبات شود. (تمرین ۵.۴)

در ادامه این فصل، \mathcal{H} نشاندهنده یک فضای هیلبرت خواهد بود.

۵.۲۱ گزاره. اگر $x_n \rightarrow x$ و $y_n \rightarrow y$ ، آنگاه $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$

برهان. بنابر نامساوی شوارتز،

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n - x, y_n \rangle + \langle x, y_n - y \rangle| \\ &\leq \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\| \end{aligned}$$

که به صفر میل می کند زیرا $\|y\| \rightarrow \|y_n\|$.

۵.۲۲. قانون متوازی الاضلاع. به ازای هر $x, y \in \mathcal{H}$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(« مجموع مربعات اقطار یک متوازی الاضلاع، مجموع مربعات چهار ضلع آن است. »)

برهان. طرفین دو فرمول $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$ را با هم جمع می کنیم.

اگر $x, y \in X$ می گوئیم x بر y عمود است و می نویسیم $x \perp y$ هرگاه $\langle x, y \rangle = 0$. اگر $E \subset \mathcal{H}$ ، تعریف می کنیم:

$$E^\perp = \{x \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0, y \in E\}.$$

بلافاصله از گزاره ۵.۲۱ و خطی بودن ضرب داخلی نسبت به مولفه اولش، نتیجه می شود که E^\perp زیرفضای بسته ای از \mathcal{H} است.

۵.۲۳ قضیه فیثاغورس. اگر $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$ و به ازای $k \neq j$ ، $x_j \perp x_k$ ، آنگاه

$$\left\| \sum_{j=1}^n x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2.$$

برهان. $\left\| \sum x_j \right\|^2 = \langle \sum x_j, \sum x_j \rangle = \sum_{j,k} \langle x_j, x_k \rangle$. جملاتی که در آنها $j \neq k$ همگی صفر هستند،

تنها $\sum \langle x_j, x_j \rangle = \sum \|x_j\|^2$ باقی می ماند. ■

۵.۲۴ قضیه. اگر M زیرفضای بسته ای از \mathcal{H} باشد، آنگاه $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ ؛ یعنی، هر $x \in \mathcal{H}$ را می توان به طور یکتا

به شکل $x = y + z$ نوشت که در آن $y \in M$ و $z \in M^\perp$. به علاوه y و z یکتا اعضای M و M^\perp هستند که فاصله آنها تا x مینیمم است.

برهان. $x \in \mathcal{H}$ را مفروض می‌گیریم، قرار می‌دهیم $\delta = \inf\{\|x - y\| : y \in \mathcal{M}\}$ ، فرض می‌کنیم $\{y_n\}$ دنباله‌ای در \mathcal{M} باشد به طوری که $\|x - y_n\| \rightarrow \delta$. بنا بر قانون متوازی‌الاضلاع،

$$2(\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2) = \|y_n - y_m\|^2 + \|y_n + y_m - 2x\|^2,$$

و چون $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\right\|^2 \\ &\leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2. \end{aligned}$$

وقتی $m, n \rightarrow \infty$ عبارت طرف راست نامساوی اخیر به صفر میل می‌کند، لذا $\{y_n\}$ یک دنباله کوشی است. فرض می‌کنیم

$y = \lim y_n$ و $z = x - y$. در این صورت $y \in \mathcal{M}$ زیرا \mathcal{M} بسته است و $\|x - y\| = \delta$. ادعا می‌کنیم که

$z \in \mathcal{M}^\perp$. در واقع اگر $u \in \mathcal{M}$ ، پس از ضرب u در یک اسکالر غیر صفر می‌توانیم فرض کنیم $\langle z, u \rangle$ حقیقی است. در این

صورت تابع

$$f(t) = \|z + tu\|^2 = \|z\|^2 + 2t\langle z, u \rangle + t^2\|u\|^2$$

به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ مقداری حقیقی دارد و یک مینیمم (یعنی δ^2) در $t = 0$ دارد زیرا $z + tu = x - (y - tu)$ و

$$y - tu \in \mathcal{M} \text{ بنا بر این } f'(0) = 2\langle z, u \rangle = 0 \text{ لذا } z \in \mathcal{M}^\perp.$$

به علاوه اگر z' عضو دیگری از \mathcal{M}^\perp باشد، بنا بر قضیه فیثاغورس (و به دلیل $x - z = y \in \mathcal{M}$) داریم:

$$\|x - z'\|^2 = \|x - z\|^2 + \|z - z'\|^2 \geq \|x - z\|^2,$$

و تساوی فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که $z = z'$. همین استدلال نشان می‌دهد که y یکتا عضو \mathcal{M} نزدیک به x است.

بالاخره، اگر $x = y' + z'$ که در آن $y' \in \mathcal{M}$ و $z' \in \mathcal{M}^\perp$ ، آنگاه $z' - z \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$ ، لذا $y - y' = z' - z \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$ ،

لذا $y = y'$ و $z = z'$ بر خودشان متعامدند و لذا صفر هستند. ■

اگر $y \in \mathcal{H}$ ، آنگاه از نامساوی شواتز معلوم می‌شود که فرمول $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ یک تابع خطی کراندار روی \mathcal{H} تعریف

می‌کند به طوری که $\|f_y\| = \|y\|$. بنا بر این، نگاشت $f_y \mapsto y$ یک ایزومتری خطی مزدوج از \mathcal{H} بتوی \mathcal{H}^* است. پوشا بودن

این نگاشت یک حکم اساسی است: $\mathcal{H}^* \cong \mathcal{H}$

۵.۲۵. قضیه. اگر $f \in \mathcal{H}^*$ ، عضو یکتایی مانند $y \in \mathcal{H}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in \mathcal{H}$ ، $f(x) = \langle x, y \rangle$.

برهان. یکتایی آسان است: اگر به ازای هر x ، $\langle x, y \rangle = \langle x, y' \rangle$ ، آنگاه با گرفتن $x = y - y'$ نتیجه می‌گیریم که

$\|y - y'\|^2 = 0$ و از این رو $y = y'$. اگر f تابع صفر باشد، آنگاه به وضوح $y = 0$. در غیر این صورت، فرض می‌کنیم:

$\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{H} : f(x) = 0\}$. در این صورت \mathcal{M} زیرفضای بسته سرهای از \mathcal{H} است، لذا بنابر قضیه ۵.۲۴، $\mathcal{M}^\perp \neq \{0\}$. حال $z \in \mathcal{M}^\perp$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $\|z\| = 1$. اگر $u = f(x)z - f(z)x$ ، آنگاه $u \in \mathcal{M}$ ، لذا $0 = \langle u, z \rangle = f(x)\|z\|^2 - f(z)\langle x, z \rangle = f(x) - \langle x, \overline{f(z)z} \rangle$.

بنابر این $f(x) = \langle x, y \rangle$ که در آن $y = \overline{f(z)z}$.

بنابراین، فضاها هیلبرت به مفهومی بسیار قوی بازتابی هستند. نه تنها \mathcal{H} به طور طبیعی با \mathcal{H}^{**} ایزومورف است بلکه به طور طبیعی (با یک نگاشت خطی - مزدوج) با \mathcal{H}^* ایزومورف است.

زیرمجموعه‌ای چون $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ از \mathcal{H} متعامد یکه نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر α ، $\|u_\alpha\| = 1$ و وقتی $\alpha \neq \beta$ ، $u_\alpha \perp u_\beta$. چنانچه $\{x_n\}_1^\infty$ یک دنباله مستقل خطی در \mathcal{H} باشد، رول استقرایی استاندارد موسوم به فرآیند گرام - اشمیت برای تبدیل $\{x_n\}$ به یک دنباله متعامد یکه مانند $\{u_n\}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر N ، فضای پدید آمده توسط $\{x_n\}_1^N$ بر فضای پدید آمده توسط $\{u_n\}_1^N$ منطبق می‌شود.

یعنی، در مرحله اول قرار می‌دهیم $u_1 = x_1 / \|x_1\|$. با داشتن تعریف u_1, \dots, u_{N-1} ، قرار می‌دهیم:

$$v_N = x_N - \sum_{n=1}^{N-1} \langle x_N, u_n \rangle u_n$$

در این صورت v_N غیر صفر است زیرا x_N در فضای پدید آمده توسط x_1, \dots, x_{N-1} قرار ندارد و در نتیجه در فضای پدید آمده توسط u_1, \dots, u_{N-1} قرار ندارد و به ازای هر $m < N$ ،

$$\langle v_N, u_m \rangle = \langle x_N, u_m \rangle - \langle x_N, u_m \rangle = 0.$$

بنابر این می‌توانیم u_N را مساوی $\frac{v_N}{\|v_N\|}$ بگیریم.

۵.۲۶ نامساوی بسل. اگر $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ مجموعه متعامد یکه‌ای در \mathcal{H} باشد، آنگاه به ازای هر $x \in \mathcal{H}$ ،

$$\sum_{\alpha \in A} |\langle x, u_\alpha \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

به ویژه، $\{\alpha : \langle x, u_\alpha \rangle \neq 0\}$ شمارش پذیر است.

برهان. کافی است نامساوی $\sum_{\alpha \in F} |\langle x, u_\alpha \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ به ازای هر زیرمجموعه مانند F از A برقرار است. اما

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| x - \sum_{\alpha \in F} \langle x, u_\alpha \rangle u_\alpha \right\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x, \sum_{\alpha \in F} \langle x, u_\alpha \rangle u_\alpha \rangle + \left\| \sum_{\alpha \in F} \langle x, u_\alpha \rangle u_\alpha \right\|^2 \\ &= \|x\|^2 - 2 \sum_{\alpha \in F} |\langle x, u_\alpha \rangle|^2 + \sum_{\alpha \in F} |\langle x, u_\alpha \rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in F} |\langle x, u_\alpha \rangle|^2, \end{aligned}$$

که در آن قضیه فیثاغورس در خط سوم به کار رفته است. ■

۵.۲۷ قضیه. هر گاه $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ یک مجموعه متعامد یکه در \mathcal{H} باشد، گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(الف) (خاصیت کمال) اگر به ازای هر α ، $\langle x, u_\alpha \rangle = 0$ ، آنگاه $x = 0$.

(ب) (اتحاد پارتسوال) به ازای هر $x \in \mathcal{H}$ ، $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\langle x, u_\alpha \rangle|^2$.

(ج) به ازای هر $x = \sum_{\alpha \in A} \langle x, u_\alpha \rangle u_\alpha$ ، $x \in \mathcal{H}$ ، که در آن سری طرف راست فقط تعداد شمارش‌پذیری جمله غیر صفر دارد و نسبت به نرم \mathcal{H} همگرا است. (به علاوه ترتیب جملات تأثیری در همگرایی ندارد.)

برهان. (الف) قسمت (ج) را ایجاب می‌کند: اگر $x \in \mathcal{H}$ ، فرض می‌کنیم $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ شمارشی از α ‌هایی باشد که برای

آنها $\langle x, u_{\alpha_j} \rangle \neq 0$. بنابر نامساوی بسل، سری $\sum_{j=1}^n |\langle x, u_{\alpha_j} \rangle|^2$ همگرا است، لذا بنابر قضیه فیثاغورس، وقتی $m, n \rightarrow \infty$

$$\left\| \sum_{j=1}^m \langle x, u_{\alpha_j} \rangle u_{\alpha_j} - \sum_{j=1}^n \langle x, u_{\alpha_j} \rangle u_{\alpha_j} \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^m |\langle x, u_{\alpha_j} \rangle|^2 \rightarrow 0.$$

بنابر این سری $\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_{\alpha_j} \rangle u_{\alpha_j}$ همگرا است زیرا \mathcal{H} کامل است. اگر $y = x - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, u_{\alpha_j} \rangle u_{\alpha_j}$ ، آنگاه به‌وضوح به ازای

هر α ، $\langle y, u_\alpha \rangle = 0$ ، لذا طبق (الف)، $y = 0$.

(ج) قسمت (ب) را ایجاب می‌کند: با نمادگذاری فوق، همچون برهان نامساوی بسل داریم:

$$\|x\|^2 - \sum_{j=1}^n |\langle x, u_{\alpha_j} \rangle|^2 = \left\| x - \sum_{j=1}^n \langle x, u_{\alpha_j} \rangle u_{\alpha_j} \right\|^2 \rightarrow 0,$$

و وقتی $n \rightarrow \infty$ طرف راست به سمت صفر میل می‌کند. بالاخره، به وضوح (ب) قسمت (الف) را ایجاب می‌کند.

مجموعه متعامد یکه‌ای که خواص (الف) تا (ج) از قضیه ۵.۲۷ را داشته باشد یک پایه متعامد یکه برای \mathcal{H} نامیده می‌شود.

برای مثال، فرض می‌کنیم $\mathcal{H} = l^2(A)$. به ازای هر $\alpha \in A$ ، $e_\alpha \in l^2(A)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e_\alpha(\beta) = \begin{cases} 1 & \beta = \alpha, \\ 0 & \beta \neq \alpha. \end{cases}$$

مثال ۵.۲۶ (ع)
 به وضوح مجموعه $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ متعامد یکه است و به ازای هر $f \in l^1(A)$ داریم: $\langle f, e_\alpha \rangle = f(\alpha)$ و از اینجا نتیجه می‌شود که $\{e_\alpha\}$ یک پایه متعامد یکه است.

۵.۲۸ گزاره) هر فضای هیلبرت یک پایه متعامد یکه دارد.

برهان. به کارگیری شسته و رفته لم زورن معلوم می‌کند که گردایه مجموعه‌های متعامد یکه که با شمول مرتب شود دارای عضو ماکسیمالی است؛ و ماکسیمال بودن با خاصیت (الف) از قضیه ۵.۲۷ هم‌ارز است. ■

۵.۲۹ گزاره) فضای هیلبرتی چون \mathcal{H} جدایی‌پذیر است اگر و تنها اگر پایه متعامد یکه شمارش‌پذیری داشته باشد که در این حالت هر پایه متعامد یکه برای \mathcal{H} شمارش‌پذیر است.

برهان. اگر $\{x_n\}$ مجموعه چگال شمارش‌پذیری از \mathcal{H} باشد، به طور بازگشتی با کنار گذاشتن هر x_n که در فضای پدید آمده توسط x_1, \dots, x_{n-1} قرار داشته باشد دنباله‌ای مستقل خطی مانند $\{y_n\}$ به دست می‌آوریم که فضای پدید آمده توسط آن در \mathcal{H} چگال است. به کارگیری فرآیند گرام-اشمیت برای $\{y_n\}$ دنباله متعامد یکه‌ای مانند $\{u_n\}$ به دست می‌دهد که فضای پدید آمده توسط آن را در \mathcal{H} چگال است و بنابر این $\{u_n\}$ یک پایه برای \mathcal{H} است. به عکس، اگر $\{u_n\}$ یک پایه متعامد یکه شمارش‌پذیر باشد، ترکیبات خطی متناهی u_n ها با ضرایب واقع در زیرمجموعه چگال شمارشی‌پذیری از \mathbb{C} ، یک مجموعه چگال شمارش‌پذیر در \mathcal{H} تشکیل می‌دهند. به علاوه، اگر $\{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$ پایه متعامد یکه دیگری باشد، آنگاه به ازای هر n مجموعه $A_n = \{\alpha \in A : \langle u_n, v_\alpha \rangle \neq 0\}$ شمارش‌پذیر است. حال بنابر خاصیت کمال $\{u_n\}$ ، $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و لذا شمارش‌پذیر است. ■

اکثر فضاهای هیلبرتی که در تمرین‌ها آمده‌اند جدایی‌پذیرند. برخی مثال‌ها را در تمرین‌های ۶۰ تا ۶۲ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

اگر \mathcal{H}_1 و \mathcal{H}_2 دو فضای هیلبرت با ضرب‌های داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ و $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ باشند، یک نگاشت یکانی از \mathcal{H}_1 به \mathcal{H}_2 نگاشت خطی وارون‌پذیری چون $U: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ است که ضرب داخلی را حفظ می‌کند، یعنی، به ازای هر x و y از \mathcal{H}_1 ،

$$\langle Ux, Uy \rangle_2 = \langle x, y \rangle_1.$$

با گرفتن $y = x$ ، می‌بینیم که هر نگاشت یکانی یک ایزومتری است: $\|Ux\|_2 = \|x\|_1$. به عکس، هر ایزومتری پوشا یکانی است (تمرین ۵۵). نگاشت‌های یکانی «ایزومورفیسم‌های» درستکاری در قبال فضاهای هیلبرت هستند؛ این نگاشت‌ها نه تنها ساختار خطی و توپولوژی را حفظ می‌کنند بلکه نرم و ضرب داخلی را نیز حفظ می‌کنند. از دید این ساختار مجرد، هر فضای

۵.۳۰ گزاره. فرض کنیم $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ یک پایه متعامد یکه برای \mathcal{H} باشد. در این صورت تناظر $\hat{x} \mapsto x$ که با $\hat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha \rangle$ تعریف می شود یک نگاشت یکانی از \mathcal{H} به $l^1(A)$ است.

برهان. به وضوح نگاشت $x \mapsto \hat{x}$ خطی است و بنابر اتحاد پارسوال، یعنی $\|\hat{x}\|^2 = \sum | \hat{x}(\alpha) |^2 = \|x\|^2$ ، نگاشت مذکور یک ایزومتری از \mathcal{H} به $l^1(A)$ است. اگر $f \in l^1(A)$ ، آنگاه $\sum |f(\alpha)| < \infty$ ، لذا از قضیه فیثاغورس معلوم می شود که دنباله مجموع های جزئی سری $\sum f(\alpha)u_\alpha$ (که فقط تعداد شمارش پذیری از جملات آن ناصفر هستند) کشی است؛ بنابر این $x = \sum f(\alpha)u_\alpha$ در \mathcal{H} وجود دارد و $\hat{x} = f$. حال بنابر قسمت (ب) از تمرین ۵۵، $\hat{x} \mapsto x$ یکانی است. ■

تمرین ها

۵۴ به ازای هر مجموعه ناتهی مانند A ، $l^1(A)$ کامل است.

۵۵ فرض کنید \mathcal{H} یک فضای هیلبرت باشد.

الف) اتحاد قطبی) به ازای هر x و y از \mathcal{H} ،

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

(کامل بودن در اینجا لازم نیست.)

ب) اگر \mathcal{H}' فضای هیلبرت دیگری باشد، یک نگاشت خطی از \mathcal{H} به \mathcal{H}' یکانی است اگر و تنها اگر ایزومتری و پوشا باشد.

۵۶ اگر E زیرمجموعه ای از یک فضای هیلبرت مانند \mathcal{H} باشد، آنگاه E^\perp کوچکترین زیرفضای بسته \mathcal{H} است که شامل E است.

۵۷ فرض کنید \mathcal{H} یک فضای هیلبرت باشد و $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

الف) عملگر خطی کراندار یکتایی چون $T^* \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ موسوم به الحاق T وجود دارد به طوری که به ازای هر x و y از \mathcal{H} ، $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$. (به تمرین ۲۲ مراجعه کنید. داریم: $T^* = V^{-1}T^\dagger V$ که در آن V ایزومورفیسم

خطی - مزدوج از \mathcal{H} به \mathcal{H} است که در قضیه ۵.۲۵ ذکر شد و $\langle (Vy), x \rangle = \langle x, y \rangle$)

ب) $\|T^*T\| = \|T\|^2$ ، $\|T^*\| = \|T\|$ ، $(aS + bT)^* = \bar{a}S^* + \bar{b}T^*$ ، $(ST)^* = T^*S^*$ ، $T^{**} = T$

ج) فرض کنید \mathcal{R} و \mathcal{N} نشانگر برد و فضای بوج باشند؛ در این صورت $\mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{R}(T^*)$ ، $\mathcal{N}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)$

(د) T یکنانی است اگر و تنها اگر T وارون پذیر باشد و $T^{-1} = T^*$.

(۵۸) فرض کنید \mathcal{M} زیرفضایی بسته از فضای هیلبرت \mathcal{H} باشد و به ازای هر $x \in \mathcal{H}$ عضو Px از \mathcal{M} باشد به طوری که همانند قضیه ۵.۲۴، $x - Px \in \mathcal{M}^\perp$.

(الف) $P \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ و با نمادگذاری تمرین ۵۷ داریم $P^T = P, P^* = P, \mathcal{R}(P) = \mathcal{M}, \mathcal{N}(P) = \mathcal{M}^\perp$
 P تصویر قائم بروی \mathcal{M} نامیده می شود.

(ب) برعکس، فرض کنیم $P \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ در تساوی های $P^T = P^* = P$ صدق کند. در این صورت $\mathcal{R}(P)$ بسته است و P تصویر قائم بروی $\mathcal{R}(P)$ است.

(ج) اگر $\{u_\alpha\}$ پایه متعامد یکه ای برای \mathcal{M} باشد، آنگاه $Px = \sum \langle x, u_\alpha \rangle u_\alpha$.

(۵۹) هر مجموعه محدب بسته مانند K در یک فضای هیلبرت عضو یکتایی با نرم مینیمال دارد. (اگر $0 \in K$ ، حکم بدیهی است؛ در غیر این صورت برهان قضیه ۵.۲۴ را بازنویسی کنید.)

(۶۰) فرض کنید (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای اندازه باشد. اگر $E \in \mathcal{M}$ ، $L^1(E, \mu)$ را با زیرفضایی از $L^1(X, \mu)$ یکی می گیریم که این زیرفضا شامل توابعی است که بیرون E صفر هستند. اگر $\{E_n\}$ دنباله ای مجزا در \mathcal{M} با خاصیت $X = \bigcup_1^\infty E_n$ باشد، آنگاه $\{L^1(E_n, \mu)\}$ دنباله ای از زیرفضاهای دو به دو متعامد $L^1(X, \mu)$ است و هر $f \in L^1(E_n, \mu)$ را می توان به طور یکتا به صورت $f = \sum_1^\infty f_n$ نوشت که در آن $f_n \in L^1(E_n, \mu)$ (سری مذکور نسبت به نرم همگرا است). اگر به ازای هر n ، $L^1(E_n, \mu)$ جدایی پذیر باشد، $L^1(X, \mu)$ نیز جدایی پذیر است.

(۶۱) فرض کنید (X, \mathcal{M}, μ) و (Y, \mathcal{N}, ν) دو فضای اندازه σ -متناهی باشند به طوری که $L^1(\mu)$ و $L^1(\nu)$ جدایی پذیر باشند. اگر $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ پایه های متعامد یکه ای برای $L^1(\mu)$ و $L^1(\nu)$ باشند و $h_{mn}(x, y) = f_n(x)g_m(y)$ ، آنگاه $\{h_{mn}\}$ یک پایه متعامد یکه برای $L^1(\mu \times \nu)$ است.

(۶۲) در این تمرین اندازه تعریف کننده فضای L^1 اندازه لبگ است.

(الف) $C([0, 1])$ در $L^1([0, 1])$ چگال است. (برهان قضیه ۲.۲۶ را بازنویسی کنید.)

(ب) مجموعه چند جمله ای ها در $L^1([0, 1])$ چگال است.

(ج) $L^1([0, 1])$ جدایی پذیر است.

(د) $L^1(\mathbb{R})$ جدایی پذیر است. (تمرین ۶۰ را به کار ببرید.)

۶۵) $L^1(\mathbb{R}^n)$ جدایی پذیر است. (تمرین ۶۱ را به کار برید.)

۶۳) فرض کنیم \mathcal{H} یک فضای هیلبرت با بعد نامتناهی است.

الف) هر دنباله متعامد یکه در \mathcal{H} به طور ضعیف به 0 همگرا است.

ب) کره واحد $S = \{x : \|x\| = 1\}$ به طور ضعیف در گوی واحد $B = \{x : \|x\| \leq 1\}$ چگال است. (در واقع، هر $x \in B$ حد ضعیف دنباله‌ای در S است.)

۶۴) فرض کنید \mathcal{H} یک فضای هیلبرت جدایی پذیر با بعد نامتناهی باشد و $\{u_n\}_1^\infty$ پایه متعامد یکه‌ای برای \mathcal{H} باشد.

الف) برای $L_k \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}), k \in \mathbb{N}$ را با $L_k(\sum_1^\infty a_n u_n) = \sum_k^\infty a_n u_{n-k}$ تعریف کنید. در این صورت

نسبت به توپولوژی عملگری قوی $L_k \rightarrow 0$ اما نسبت به توپولوژی نرمی چنین نیست.

ب) برای $R_k \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}), k \in \mathbb{N}$ را با $R_k(\sum_1^\infty a_n u_n) = \sum_1^\infty a_n u_{n+k}$ تعریف کنید. در این صورت

نسبت به توپولوژی عملگری ضعیف $R_k \rightarrow 0$ اما نسبت به توپولوژی عملگری قوی چنین نیست.

ج) نسبت به توپولوژی عملگری قوی $R_k L_k \rightarrow 0$ ، اما به ازای هر $k, L_k R_k = I$. (قسمت ب) از تمرین ۵۳ را به کار برید.)

۶۵) $l^1(A)$ به طور یکانی با $l^1(B)$ ایزومورف است اگر و تنها اگر $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.

۶۶) فرض کنید \mathcal{M} یک زیرفضای بسته از $L^1([0, 1], \mathcal{M})$ باشد که در $C([0, 1])$ مشمول است. نشان دهید که:

الف) عددی مانند $C > 0$ وجود دارد که به ازای هر $f \in \mathcal{M}, \|f\|_\infty \leq C \|f\|_{L^1}$. (قضیه نگار بسته را به کار برید.)

ب) به ازای هر $x \in [0, 1]$ عضو \mathcal{M} چون $g_x \in \mathcal{M}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $f \in \mathcal{M}, f(x) = \langle f, g_x \rangle$ و

$$\|g_x\|_{L^1} \leq C$$

ج) بعد \mathcal{M} حداکثر C^2 است. (راهنمایی: اگر $\{f_j\}$ دنباله متعامد یکه ای در \mathcal{M} باشد، آنگاه به ازای هر $x \in [0, 1]$

$$\sum |f_j(x)|^2 \leq C^2$$

۶۷) (قضیه همه سویی میانگین). فرض کنید U یک عملگر یکانی روی فضای هیلبرت \mathcal{H} باشد، $\mathcal{M} = \{x : Ux = x\}$

P تصویر متعامد بروی \mathcal{M} باشد (تمرین ۵۸) و $S_n = n^{-1} \sum_0^{n-1} U^j$. در این صورت نسبت به توپولوژی عملگری قوی $S_n \rightarrow P$. (اگر $x \in \mathcal{M}$ آنگاه $S_n x = x$ ؛ اگر به ازای عضو $y, U y = y - U y$ ، آنگاه $S_n x \rightarrow 0$. بنابراین قسمت

د) از تمرین ۵۷، $\mathcal{M} = \{x : U^* x = x\}$. قسمت ج) از تمرین ۵۷ را در مورد $T = I - U$ به کار برید.)

۵.۶ یادداشت‌ها و مراجع

آنالیز تابعی مبحث وسیعی است که ما فقط زخمه‌ای به سطح آن زده ایم. برای خوانندگانی که قصد یادگیری بیشتر دارند، رایید و سیمون [۱۱۲] و رودین [۱۲۶] نقطه خوبی برای شروع کار است؛ بایستی با رساله‌های دانفورد و شوارتز [۲۵] و یوسیدا [۱۶۳] نیز آشنا شد.

آنالیز تابعی ریشه در تعدادی مسئله کلاسیک به‌ویژه در نظریه معادلات دیفرانسیل و انتگرال دارد. مطالعه فضاهای تابعی با بعد نامتناهی خاص تقریباً در سال ۱۹۰۷ با کارهای اف. ریس، فرشه، اشمیت، هلی و دیگران شروع شد و مفهوم یک فضای برداری نرم‌دار مجرد در سال ۱۹۲۰ به وسیله چند مؤلف در مقالات ظاهر شد. یافته‌های این دهه پر بار به کتاب کلاسیک باناخ [۹] منجر شده است که ظهور آنالیز تابعی را به‌عنوان یک شاخه ثبت کرده است. شرح تاریخی جامع را در دیودونه [۳۳] و یادداشت‌های دانفورد و شوارتز می‌توان یافت.

بند ۱.۵: انتگرال توابع با مقادیر برداری که در تمرین ۱۶ مورد بحث قرار گرفت انتگرال بوخنر نامیده می‌شود. فرض جدایی‌پذیری Y را می‌توان تقلیل داد، اما در این صورت توابع واقع در L^1_Y حتماً باید (پس از تعدیل روی مجموعه‌های پوچ) برد جدایی‌پذیری داشته باشند. در کهن [۲۷] یا یوسیدا [۱۶۳] شرح مفصل‌تری می‌توان یافت.

راهبرد دیگر به انتگرال‌های با مقدار برداری به صورت زیر است: فرض می‌کنیم (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای اندازه باشد و Y فضای برداری توپولوژیکی باشد که روی آن تابع‌های خطی پیوسته نقاط را جدا کنند. تابعی چون $f: X \rightarrow Y$ انتگرال‌پذیر ضعیف نامیده می‌شود هرگاه الف: برای هر $\phi \in Y^*$ ، $\phi \circ f \in L^1(\mu)$ ، و ب: عضوی (لزوماً یکتا) مانند y از Y وجود داشته باشد به طوری که برای هر $\phi \in Y^*$ ، $\int \phi \circ f d\mu = \phi(y)$ ، در این حالت قرار می‌دهیم $\int f d\mu = y$. اگر Y یک فضای باناخ جدایی‌پذیر باشد، انتگرال به این مفهوم با انتگرال بوخنر مطابقت دارد. یوسیدا [۱۶۳] و رودین [۱۲۶] را ببینید.

بند ۵.۳: قضایای نگاشت باز و نگار بسته به باناخ نسبت داده می‌شوند [۹]. برای شرح جالب رابطه بین برهان‌های قضیه نگاشت باز و قضیه توسیع تیتسه گراینر [۵۸] را ببینید.

اصل کرانداری یکنواخت، به همان صورتی که در این کتاب آمده است به باناخ و اشتنهاوس [۱۰] منسوب است؛ اما قسمت دوم قضیه — اینکه اگر X یک فضای باناخ باشد و برای هر $x \in X$ ، $\sup_{T \in \mathcal{R}} \|Tx\| < \infty$ ، آنگاه $\sup_{T \in \mathcal{R}} \|T\| < \infty$ — به کمک آنچه دیودونه «روش سرخوردن از پشت» نامید اثبات شده بود [۳۳]. این استدلال بسیار زیبا (و مقدماتی)، در سال‌های اخیر مورد بی‌اعتنایی زیادی قرار گرفته است، اما شرح نوینی از آن را می‌توان در هنفلد [۷۷] یافت.

وقتی X کامل نباشد ساختن مثال‌هایی از نگاشت‌های خطی غیر کرانداری مانند $T: X \rightarrow Y$ از یک فضای برداری نرم‌دار به فضای برداری نرم‌دار دیگر آسان است (تمرین‌های ۲۹ و ۳۰ را ببینید)، اما وقتی X کامل باشد انجام چنین کاری بدون استفاده از اصل انتخاب تقریباً غیر ممکن است؛ با یک نگاشت غیر کرانداری مانند $T: X_0 \rightarrow Y$ شروع می‌کنیم که در آن X_0

کامل نیست و فرض می‌کنیم X کامل شده X_0 باشد. پایه‌ای چون $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ برای X_0 برمی‌گزینیم (بدین معنی که هر $x \in X_0$ یک ترکیب خطی متناهی از u_α ها است) و آن را به پایه‌ای چون $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{B}}$ ($\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$) برای X توسعه می‌دهیم. (اینجا است که اصل انتخاب به کار می‌آید.) فرض می‌کنیم \mathcal{M} پیمای خطی $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}}$ باشد، لذا هر $x \in X$ را می‌توان به طور یکتا به صورت $x = x_0 + x_1$ نوشت که در آن $x_0 \in X_0$ و $x_1 \in \mathcal{M}$. در این صورت با قرار دادن $T(x_0 + x_1) = Tx_0$ می‌توان T را به X توسعه داد.

بند ۵.۴: تروس [۱۵۰] شامل شرحی خواندنی در مورد نظریه عمومی فضاها برداری توپولوژیک با چند مثال ملموس است.

قضیه الاغلو که نخستین بار در الاغلو [۳] ابراز و به طور مفصل در الاغلو [۴] اثبات شده بود، جای تعدادی از احکام مرتبط با حالات خاص را گرفت. این قضیه مستقل از الاغلو توسط بورباکی کشف شده بود [۱۹].

بند ۵.۵: فضایی که توسط خود هیلبرت پیش بینی شد $l^2(\mathbb{N})$ بود؛ مفهوم یک فضای هیلبرت مجرد توسط فون نویمان [۱۵۴] در خلال کار ایشان روی ریاضیات مکانیک کوانتوم ارائه شده بود.

سرمنشأ قضیه ۵.۲۵ در سطح قضایای L^2 به اف. ریس نسبت داده شده است. این قضیه یکی از چندین قضیه نمایش تابع‌های خطی روی فضاهاى مختلفی است که نامش را یدک می‌کشد، بقیه قضایا ۶.۱ و ۷.۱ می‌باشند. برای پرهیز از سردرگمی، نام «قضیه نمایش ریس» را برای دوتای اخیر که نسبتاً مرتبط هستند رزرو می‌کنیم. در کتاب‌های فیزیک کوانتوم، بنا بر عادت ضرب‌های اسکالر با $\langle x|y \rangle$ نشان داده می‌شوند و نسبت به متغیر دوم خطی و نسبت به مؤلفه اول خطی — مختلط است.

فصل ششم

L^p فضاهای

فضاهای L^p رسته‌ای از فضاهای باناخ هستند که از توابع تشکیل شده‌اند و نرم آنها بر حسب انتگرال‌ها تعریف می‌شوند و فضاهای L^1 بحث شده در فصل ۲ را تعمیم می‌دهند. این فضاها مثال‌های جالبی از نظریه کلی فصل ۵ فراهم آورده و نقشی اساسی در آنالیز نوین ایفا می‌کنند.

۶.۱ نظریه بنیادی فضاهای L^p

در این فصل روی فضای اندازه ثابتی مانند (X, \mathcal{M}, μ) کار خواهیم کرد. چنانچه f تابع اندازه‌پذیری روی X باشد و $0 < p < \infty$ ، تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_p = \left[\int |f|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}}$$

(حالت $\|f\|_p = \infty$ منتفی نیست) و

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_p < \infty \text{ و } f \text{ اندازه پذیر است}\}.$$

$L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ را به $L^p(\mu)$ یا $L^p(X)$ یا حتی به L^p خلاصه می‌کنیم به شرطی که حالت اخیر ابهام ایجاد نکند. همانند آنچه در L^1 داشتیم دو تابع را اعضای یکسانی از L^p تعریف می‌کنیم هرگاه این دو تابع تقریباً همه جا برابر باشند. اگر A مجموعه‌ای ناتمامی باشد، $L^p(A)$ را $L^p(\mu)$ تعریف می‌کنیم که در آن μ اندازه شمارشی روی $(A, \mathcal{P}(A))$ است و $L^p(\mathbb{N})$ را به طور خلاصه با l^p نشان می‌دهیم.

L^p یک فضای برداری است، زیرا اگر $f, g \in L^p$ آنگاه

$$|f + g|^p \leq [2 \max(|f|, |g|)]^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p).$$

بنابر این $f + g \in L^p$. نمادگذاری فوق حکایت از این دارد که $\|cf\|_p = |c| \|f\|_p$ و $\|cf\|_p = \|f\|_p$ تنها اگر $f = 0$ است. معلوم می‌شود که

نامساوی مثلثی دقیقاً زمانی معتبر است که $p \geq 1$ ، لذا توجه خود را منحصرأ به همین حالت معطوف خواهیم کرد.

اما قبل از هر اقدام دیگر، بگذارید ببینیم چرا نامساوی مثلثی برای $p < 1$ درست نیست. فرض می‌کنیم $a > 0, b > 0$ و $0 < p < 1$. برای $t > 0$ داریم $(a+t)^{p-1} > t^{p-1}$ و با انتگرالگیری از 0 تا b به دست می‌آوریم $a^p + b^p > (a+b)^p$. بنابراین، اگر E و F مجموعه‌هایی مجزا از اندازه‌های متناهی مثبت در X باشند و قرار دهیم $a = \mu(E)^{\frac{1}{p}}$ و $b = \mu(F)^{\frac{1}{p}}$ می‌بینیم که

$$\left(\| \chi_E + \chi_F \|_p = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} > a + b = \| \chi_E \|_p + \| \chi_F \|_p \right)$$

سنگ بنای نظریه فضاها L^p ، نامساوی هولدر است، که هم اکنون آن را استخراج می‌کنیم.

۶.۱. لم. اگر $a \geq 0, b \geq 0$ و $0 < \lambda < 1$ ، آنگاه $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b$ و تساوی فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که $a = b$.

برهان. اگر $b = 0$ ، حکم بدیهی است؛ در غیر این صورت، با تقسیم طرفین بر b و با قرار دادن $t = \frac{a}{b}$ ، مسئله به این تقلیل می‌یابد که نشان دهیم $t^\lambda \leq \lambda t + (1-\lambda)$ و تساوی فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که $t = 1$. اما بنابر حسابان مقدماتی، $t^\lambda - \lambda t$ برای $t < 1$ اکیداً صعودی و برای $t > 1$ اکیداً نزولی است، لذا مقدار ماکسیم آن، یعنی $1 - \lambda$ در $t = 1$ رخ می‌دهد. ■

۶.۲ نامساوی هولدر. فرض می‌کنیم $1 < p < \infty$ و $p^{-1} + q^{-1} = 1$ (یعنی $q = \frac{p}{p-1}$). اگر f و g توابع اندازه‌پذیری روی X باشند، آنگاه

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (6.3)$$

به‌ویژه، اگر $f \in L^p$ و $g \in L^q$ ، آنگاه $fg \in L^1$ و در این حالت تساوی در (۶.۳) فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که به ازای ثابت‌های ناصفری چون α و β ، $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ ، $\alpha, \beta > 0$.

برهان. اگر $\|f\|_p = 0$ یا $\|g\|_q = 0$ ، حکم بدیهی است. (زیرا در این حالت $f = 0$ یا $g = 0$ ، حکم در حالتی که $\|f\|_p = \infty$ یا $\|g\|_q = \infty$ نیز بدیهی است. به‌علاوه، ملاحظه می‌کنیم که اگر (۶.۳) برای توابع خاصی مانند f و g برقرار باشد، آنگاه برای هر مضرب اسکالر از f و g نیز برقرار است، زیرا اگر f و g را با a و b جایگزین کنیم، هر دو طرف (۶.۳) با یک ضریب از $|ab|$ تغییر می‌یابد. بنابراین کافی است ثابت کنیم وقتی $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ نامساوی (۶.۳) برقرار است و تساوی فقط و فقط وقتی رخ می‌دهد که $|f|^p = |g|^q$ ، به این منظور، لم ۶.۱ را با $a = |f(x)|^p$ ، $b = |g(x)|^q$ و $\lambda = p^{-1}$ به کار بسته و به دست می‌آوریم:

$$|f(x)g(x)| \leq p^{-1}|f(x)|^p + q^{-1}|g(x)|^q. \quad (6.4)$$

انتگرال گیری از دو طرف به دست می دهند:

$$\|fg\|_1 \leq p^{-1} \int |f|^p + q^{-1} \int |g|^q = p^{-1} + q^{-1} = 1 = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

در اینجا تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که تساوی در (۶.۴) ت. ه. برقرار باشد، و بنابر لم ۶.۱ این دقیقاً وقتی اتفاق می افتد که $|f|^p = |g|^q$ ت. ه. ■

شرط $p^{-1} + q^{-1} = 1$ که در نامساوی هولدر ظاهر شد، در نظریه فضاهای L^p خیلی دیده می شود. اگر $1 < p < \infty$ ، عدد $q = \frac{p}{p-1}$ به طوری که $p^{-1} + q^{-1} = 1$ نمای مزدوج با p نامیده می شود.

۶.۵ نامساوی مینکوفسکی. اگر $1 \leq p < \infty$ و $f, g \in L^p$ ، آنگاه

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

برهان. اگر $p = 1$ یا $f + g = 0$ ت. ه.، حکم بدیهی است. در غیر این صورت، ملاحظه می کنیم که

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)|f + g|^{p-1}$$

و نامساوی هولدر را به کار می بریم؛ فقط توجه می کنیم که وقتی q نمای مزدوج با p است داریم $(p-1)q = p$ و لذا

$$\int |f + g|^p \leq \|f\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q$$

$$= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int |f + g|^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

طرفین را این سیستم می

بنابر این،

$$\|f + g\|_p = \left[\int |f + g|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \blacksquare$$

این حکم نشان می دهد که برای $p \geq 1$ ، L^p یک فضای برداری نرمدار است. حتی حکمی قوی تر از اینها درست است:

۶.۶ قضیه. برای $1 \leq p < \infty$ ، L^p یک فضای باناخ است.

برهان. قضیه ۵.۱ را به کار می بریم. فرض می کنیم $\{f_k\} \subset L^p$ و $\sum_1^\infty \|f_k\|_p = B < \infty$. قرار می دهیم $G_n = \sum_1^n |f_k|$ و $G = \sum_1^\infty |f_k|$. در این صورت برای هر n ، $\|G_n\|_p \leq \sum_1^n \|f_k\|_p \leq B$ ، لذا بنابر قضیه همگرایی یکنوا، $\int G^p = \lim \int G_n^p \leq B^p$ و $G \in L^p$ و مخصوصاً $G(x) < \infty$ ت. ه. و این هم ایجاب می کند که سری $\sum_1^\infty f_k$ همگرا است. با نمایش این سری، $F \in L^p$ و $\|F\|_p \leq B$ ؛ به علاوه،

$$\left| F - \sum_1^n f_k \right|^p \leq (\sum G)^p \in L^1.$$

لذا بنابر قضیه همگرایی مغلوب،

$$\left\| F - \sum_1^n f_k \right\|_p^p = \int \left| F - \sum_1^n f_k \right|^p \rightarrow 0.$$

بنابر این سری $\sum_1^\infty f_k$ با نرم L^p همگرا است. ■

۷. ۶ گزاره. برای $1 \leq p < \infty$ ، مجموعه توابع ساده $f = \sum_1^n a_j \chi_{E_j}$ که در آن برای هر j ، $\mu(E_j) < \infty$ ، در L^p چگال است.

برهان. به وضوح چنین توابعی در L^p هستند. اگر $f \in L^p$ ، آنگاه مطابق با قضیه ۲.۱۰، دنباله‌ای مانند $\{f_n\}$ از توابع ساده انتخاب می‌کنیم به طوری که $f_n \rightarrow f$ ت. ه. و $|f_n| \leq |f|$. در این صورت $f_n \in L^p$ و $|f_n - f|^p \leq 2^p |f|^p \in L^1$ ، لذا بنابر قضیه همگرایی مغلوب، $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. به علاوه، هرگاه $f_n = \sum a_j \chi_{E_j}$ ، که در آن E_j ها مجزا و a_j ها غیر صفرند، باید داشته باشیم

$$\sum |a_j|^p \mu(E_j) = \int |f_n|^p < \infty \text{ زیرا } \mu(E_j) < \infty$$

برای تکمیل چهره فضاها L^p ، فضایی متناظر با مقدار حدی $p = \infty$ می‌سازیم اگر f تابع اندازه‌پذیری روی X باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_\infty = \inf \{a \geq 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\},$$

با این قرارداد که $\inf \emptyset = \infty$. ملاحظه می‌کنیم که اینفیم عملاً حاصل می‌شود زیرا

$$\{x : |f(x)| > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : |f(x)| > a + n^{-1}\},$$

و اگر مجموعه‌های طرف راست بوج باشند، سمت چپ نیز بوج است. $\|f\|_\infty$ سوپرنرم اساسی $|f|$ نامیده شده و گاهی از اوقات به صورت

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|$$

نوشته می‌شود. اکنون تعریف می‌کنیم:

$$L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_\infty < \infty \text{ و } f \text{ اندازه پذیر است}\}$$

با این قرارداد متداول که دو تابع تقریباً همه جا برابر اعضای یکسانی از L^∞ هستند، بنابر این $f \in L^\infty$ اگر و تنها اگر تابع اندازه‌پذیری مانند g وجود داشته باشد به طوری که $f = g$ ت. ه.؛ می‌توان g را چنین گرفت: $g = f \chi_E$ که در آن

$$E = \{x : |f(x)| \leq \|f\|_\infty\}$$

دونکته: اولاً، اگر X و \mathcal{M} ثابت باشند، آنگاه $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ فقط تا جایی به μ وابسته است که μ مشخص کند که کدام مجموعه‌ها دارای اندازه صفرند؛ اگر μ و ν مشترکاً بیوسه مطلق باشند، آنگاه $L^\infty(\mu) = L^\infty(\nu)$. ثانیاً، هرگاه μ نیمه متناهی

نباشد، به دلیلی مقتضی است که تعریف متفاوتی برای L^∞ ارائه شود. این نکته در تمرین‌های ۲۳ تا ۲۵ مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

احکامی که برای $1 \leq p < \infty$ اثبات کرده‌ایم به آسانی و به صورت زیر به حالت $p = \infty$ تعمیم می‌یابند:

۶.۸ قضیه.

الف) اگر f و g توابع اندازه‌پذیری روی X باشند، آنگاه $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$. چنانچه $f \in L^1$ و $g \in L^\infty$.

ب) $\|fg\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_\infty$ اگر و تنها اگر روی مجموعه‌ای که در آن $f(x) \neq 0$ داشته باشیم $|g(x)| = \|g\|_\infty$ ت. ه.

ج) $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ اگر و تنها اگر عضو E از M وجود داشته باشد به طوری که $\mu(E^c) = 0$ و $f_n \rightarrow f$ به طور یکنواخت بر E .

د) L^∞ یک فضای باناخ است.

ه) مجموعه توابع ساده در L^∞ چگال است.

برهان به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۲).

با توجه به قسمت (الف) از قضیه ۶.۸ و تساوی صوری $1 = \infty^{-1} + 1^{-1}$ ، طبیعی است که ۱ و ∞ را به عنوان نماهای مزدوج یکدیگر در نظر بگیریم و از این به بعد چنین چیزی را به کار می‌بریم. قسمت (ج) از قضیه ۶.۸ نشان می‌دهد که $\| \cdot \|_\infty$ نزدیک و وابسته به نرم یکنواخت $\| \cdot \|_1$ است اما همیشه برابر نیستند. البته، اگر با اندازه لبگ یا به طور کلی با هر اندازه برلی سر و کار داشته باشیم که به همه مجموعه‌های باز مقادیر مثبت نسبت دهد، آنگاه برای f ‌های پیوسته داریم $\|f\|_\infty = \|f\|_1$ زیرا $\{x : |f(x)| > a\}$ باز است. با این تفاسیر می‌توانیم نمادهای $\|f\|_\infty$ و $\|f\|_1$ را به جای یکدیگر به کار ببریم و فضای توابع پیوسته کراندار را به عنوان زیرفضایی (بسته!) از L^∞ در نظر بگیریم. به طور کلی، برای هر $p \neq q$ داریم $L^p \not\subset L^q$ ؛ برای مشاهده معضل مورد بحث، مثال‌های ساده زیر روی $(0, \infty)$ با اندازه لبگ آموزنده است. فرض کنیم $f_a(x) = x^{-a}$ ، که در آن $a > 0$. به کمک حسابان مقدماتی می‌توان نشان داد که $f_a \chi_{(0,1)} \in L^p$ اگر و تنها اگر $p < a^{-1}$ و $f_a \chi_{(1,\infty)} \in L^p$ اگر و تنها اگر $p > a^{-1}$. بنابراین این دو دلیل برای این دیده می‌شود که تابعی چون f در L^p نباشد؛ یا $\|f\|_p$ نزدیک یک نقطه خیلی سریع نوسان می‌کند یا با سرعت کافی در بینهایت تحلیل نمی‌رود. در حالت اول، وقتی p نزول می‌کند رفتار $\|f\|_p$ بدتر می‌شود در حالی که در دومی بهتر می‌شود. به عبارت دیگر، اگر $p < q$ ، توابع واقع در L^p می‌توانند موضعاً غیر عادی‌تر از توابع واقع در L^q باشند، حال آنکه توابع واقع در L^q می‌توانند به طور سراسری گسترده‌تر از توابع واقع در L^p باشند. همین ایده‌های بیان شده نسبتاً نادقیق، عملاً الگوی نسبتاً دقیقی برای وضعیت کلی هستند و هم اینک در مورد آن، چهار حکم دقیق می‌آوریم. دو مورد آخر نشان می‌دهند که تحت شرایطی روی فضای اندازه که یکی از انواع رفتارهای ناپه‌نجار توصیف شده فوق را رفع کنند می‌توان جزئیت $L^p \subset L^q$ را به دست آورد؛ برای حکمی کلی‌تر، تمرین ۵ را ببینید.

۹. گزاره ۶. اگر $0 < p < q < r \leq \infty$ ، آنگاه $L^q \subset L^p + L^r$ ؛ یعنی، هر $f \in L^q$ مجموع یک تابع در L^p و یک تابع در L^r است.

برهان. برای $f \in L^q$ فرض می‌کنیم $E = \{x : |f(x)| > 1\}$ و قرار می‌دهیم $g = f \chi_E$ و $h = f \chi_{E^c}$. در این صورت $|g|^p = |f|^p \chi_E \leq |f|^q \chi_E$ و $g \in L^p$ و $|h|^r = |f|^r \chi_{E^c} \leq |f|^q \chi_{E^c}$ و $h \in L^r$ (واضح است که برای $r = \infty$ ، $\|h\|_\infty \leq 1$). ■

۱۰. گزاره ۶. اگر $0 < p < q < r \leq \infty$ ، آنگاه $L^p \cap L^r \subset L^q$ ، آنگاه $\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}$

که در آن $\lambda \in (0, 1)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:
 $\lambda = \frac{q^{-1} - r^{-1}}{p^{-1} - r^{-1}}$ یعنی $q^{-1} = \lambda p^{-1} + (1-\lambda)r^{-1}$

برهان. هرگاه $r = \infty$ ، داریم $|f|^q \leq \|f\|_\infty^{q-p} |f|^p$ و $\lambda = \frac{p}{q}$ ، لذا
 $\|f\|_q \leq \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{q}} = \|f\|_p^\lambda \|f\|_\infty^{1-\lambda}$
 چنانچه $r < \infty$ ، نماهای مزدوج را $\frac{p}{\lambda q}$ و $\frac{r}{(1-\lambda)q}$ گرفته و از قضیه هولدر استفاده می‌کنیم:
 $\int |f|^q = \int |f|^{\lambda q} |f|^{(1-\lambda)q} \leq \left\| |f|^{\lambda q} \right\|_{\frac{p}{\lambda q}} \left\| |f|^{(1-\lambda)q} \right\|_{\frac{r}{(1-\lambda)q}}$
 $= \left[\int |f|^p \right]^{\frac{\lambda q}{p}} \left[\int |f|^r \right]^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} = \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|_r^{(1-\lambda)q}$

با ریشه q ام گرفتن به حکم می‌رسیم. ■

۱۱. گزاره ۶. اگر A مجموعه ای دل خواه باشد و $0 < p < q \leq \infty$ ، آنگاه $l^p(A) \subset l^q(A)$ و $\|f\|_q \leq \|f\|_p$

برهان. به وضوح $\|f\|_\infty^p = \sup_\alpha |f(\alpha)|^p \leq \sum_\alpha |f(\alpha)|^p$ ، لذا $\|f\|_\infty \leq \|f\|_p$. حالت $q < \infty$ از گزاره ۶.۱۰ نتیجه می‌شود: اگر $\lambda = \frac{p}{q}$ ، آنگاه

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_\infty^{1-\lambda} \leq \|f\|_p \cdot \blacksquare$$

۱۲. گزاره ۶. اگر $\mu(X) < \infty$ و $0 < p < q \leq \infty$ ، آنگاه $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ و $\|f\|_p \leq \|f\|_q \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$

$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \Rightarrow \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^\infty\right)^{\frac{1}{\infty}}$
 برهان. اگر $q = \infty$ ، حکم بدیهی است:

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p \leq \|f\|_\infty^p \int 1 = \|f\|_\infty^p \mu(X).$$

چنانچه $q < \infty$ ، از نامساوی هولدر با نماهای مزدوج $\frac{q}{q-p}$ و $\frac{q}{p}$ استفاده می‌کنیم:

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p \cdot 1 \leq \| |f|^p \|_p \|1\|_{\frac{q}{q-p}} = \|f\|_q^p \mu(X)^{\frac{q-p}{q}}. \blacksquare$$

این بخش را با چند نکته درباره اهمیت فضاهای L^p به پایان می‌رسانیم. واضح است که سه تا از مهمترین این فضاها L^1 ، L^2 و L^∞ هستند. از قبل با L^1 آشنایی داریم؛ L^2 خاص است زیرا یک فضای هیلبرت است و توپولوژی L^∞ بسیار نزدیک و وابسته به توپولوژی همگرایی یکنواخت است. متأسفانه L^1 و L^∞ از چند لحاظ نارسایی دارند و ارتباط برقرار کردن بین آنها و L^p های میانی ثمراتی دارد. نظریه دوگان‌ها در بند ۶.۲ نمودی از این مطلب است؛ نشان دیگری از این نقص مذکور، این است که تعدادی عملگر مشترک در آنالیز فوریه و معادلات دیفرانسیل برای $1 < p < \infty$ روی L^p کراندار هستند اما روی L^1 یا L^∞ کراندار نیستند. (چند مثال در بند ۹.۴ ذکر خواهد شد.)

تمرین‌ها

(۱) چه موقعی در نامساوی مینکوفسکی تساوی برقرار می‌شود؟ (پاسخ برای $p = 1$ و برای $1 < p < \infty$ متمایز است. در مورد $p = \infty$ چطور؟)

(۲) قضیه ۶.۸ را ثابت کنید.

(۳) اگر $1 \leq p < r \leq \infty$ ، آنگاه $L^p \cap L^r$ با نرم $\|f\| = \|f\|_p + \|f\|_r$ یک فضای باناخ است و هرگاه $p < q < r$ ، نگاشت احتوای $L^p \cap L^r \rightarrow L^q$ پیوسته است.

(۴) اگر $1 \leq p < r \leq \infty$ ، آنگاه $L^p + L^r$ با نرم

$$\|f\| = \inf\{\|g\|_p + \|h\|_r : f = g + h\}$$

یک فضای باناخ است و هرگاه $p < q < r$ ، نگاشت احتوای $L^p + L^r \rightarrow L^q$ پیوسته است.

(۵) فرض کنیم $0 < p < q < \infty$. در این صورت $L^p \not\subset L^q$ اگر و تنها اگر X شامل مجموعه‌هایی با اندازه به دل خواه کوچک باشد و $L^q \not\subset L^p$ اگر و تنها اگر X شامل مجموعه‌هایی با اندازه متناهی به دل خواه بزرگ باشد. (در رابطه با لزوم شرط توجه

کنید که در حالت نخست دنباله‌ای مجزا مانند $\{E_n\}$ وجود دارد به طوری که $0 < \mu(E_n) < 2^{-n}$ و در حالت دوم دنباله‌ای مجزا مانند $\{E_n\}$ وجود دارد که $1 \leq \mu(E_n) < \infty$. $f = \sum a_n \chi_{E_n}$ را با ثابت‌های مناسب a_n در نظر بگیرید. (در مورد حالت $q = \infty$ چطور؟)

(۶) فرض کنید $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$. مثال‌هایی از توابع f روی $(0, \infty)$ (با اندازه لبگ) بیابید به طوری که $f \in L^p$ اگر و تنها اگر:

الف) $p_0 < p < p_1$ ؛

ب) $p_0 \leq p \leq p_1$ ؛

ج) $p = p_0$. (توابع به شکل $f(x) = x^{-a} |\log x|^b$ را در نظر بگیرید.)

(۷) اگر برای یک $p < \infty$ ، $f \in L^p \cap L^\infty$ و در نتیجه برای هر $q > p$ ، $f \in L^q$ ، آنگاه $\|f\|_\infty = \lim_{q \rightarrow \infty} \|f\|_q$.

(۸) فرض کنید $\mu(X) = 1$ و برای $f \in L^p$ ، $p > 0$ و در نتیجه برای هر $0 < q < p$ ، $f \in L^q$. نشان دهید که:

الف) $\log \|f\|_q \geq \int \log |f|$. (قسمت (د) از تمرین ۴۲ از بند ۵.۳ را با فرض $F(t) = e^t$ به کار ببرید.)

ب) $\frac{1}{q} (\int |f|^q - 1) \geq \log \|f\|_q$ و وقتی $q \rightarrow 0$ ، $\frac{1}{q} (\int |f|^q - 1) \rightarrow \int \log |f|$.

ج) $\lim_{q \rightarrow 0} \|f\|_q = \exp(\int \log |f|)$.

(۹) فرض کنید $1 \leq p < \infty$. اگر $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ ، آنگاه $f_n \rightarrow f$ در اندازه، و بنا بر این $\{f_n\}$ زیردنباله‌ای دارد که تقریباً همه جا به f همگرا است. از طرف دیگر، اگر $f_n \rightarrow f$ در اندازه و برای هر n ، $|f_n| \leq g \in L^p$ ، آنگاه $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

(۱۰) فرض کنید $1 \leq p < \infty$. اگر $f_n, f \in L^p$ و $f_n \rightarrow f$ ، آنگاه $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ اگر و تنها اگر $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$. (تمرین ۲۰ از بند ۳.۲ را به کار ببرید.)

(۱۱) چنانچه f تابع اندازه‌پذیری روی X باشد، برد اساسی R_f از f را مجموعه همه z هایی از \mathbb{C} تعریف می‌کنیم که برای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه $\{x : |f(x) - z| < \varepsilon\}$ اندازه مثبتی دارد. الف) R_f بسته است.

ب) اگر $f \in L^\infty$ ، آنگاه R_f فشرده است و $\|f\|_\infty = \max\{|z| : z \in R_f\}$.

(۱۲) اگر $p \neq 2$ ، نرم L^p از روی یک حاصلضرب داخلی روی L^p به دست نمی آید مگر در حالت بدیهی $\dim(L^p) \leq 1$. (نشان دهید که قانون متوازی الاضلاع (در اینجا) نادرست است.)

(۱۳) برای $1 \leq p < \infty$ ، فضای $L^p(\mathbb{R}^n, m)$ جدایی پذیر است. اما $L^\infty(\mathbb{R}^n, m)$ جدایی پذیر نیست. (مجموعه ای شمارش ناپذیر مانند $\mathcal{F} \subset L^\infty$ وجود دارد به طوری که برای هر $f, g \in \mathcal{F}$ که $f \neq g$ ، $\|f - g\|_\infty \geq 1$.)

(۱۴) اگر $g \in L^\infty$ ، آنگاه عملگر T که با $Tf = fg$ تعریف می شود برای $1 \leq p \leq \infty$ روی L^p کراندار است. نرم عملگری T حداکثر $\|g\|_\infty$ است و اگر μ نیمه متناهی باشد تساوی رخ می دهد.

(۱۵) (قضیه همگرایی ویتاللی) فرض کنیم $1 \leq p < \infty$ و $\{f_n\}_1^\infty \subset L^p$. برای کنشی بودن $\{f_n\}$ نسبت به نرم L^p لازم و کافی است سه شرط زیر برقرار باشند:

(الف) $\{f_n\}$ در اندازه کنشی باشد؛

(ب) دنباله $\{|f_n|^p\}$ به طور یکنواخت انتگرال پذیر باشد (تمرین ۱۱ از بند ۳.۲ را ببینید)؛ و

(ج) برای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه ای چون $E \subset X$ وجود داشته باشد به طوری که $\mu(E) < \infty$ و برای هر n ،

$$\int_E |f_n|^p < \varepsilon.$$

(برای اثبات کفایت: $\varepsilon > 0$ را مفروض گرفته و E را همان مجموعه ذکر شده در (ج) بینگارید و قرار

دهید $A_{mn} = \{x \in E : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}$. در این صورت به سه دلیل متفاوت، وقتی m و n بزرگ می شوند

انتگرال های $|f_n - f_m|^p$ روی $E \setminus A_{mn}$ ، A_{mn} و E^c بزرگ می شوند.)

(۱۶) اگر $0 < p < 1$ ، آنگاه فرمول $\rho(f, g) = \int |f - g|^p$ یک متر روی L^p تعریف می کند که این متر L^p را به یک فضای

برداری توپولوژیک کامل تبدیل می کند (برای $p < 1$ ، هرگاه $\|f\|_p$ را با $\int |f|^p$ جایگزین کنیم باز هم برهان گزاره ۶.۶ کارایی

دارد زیرا در این برهان فقط از نامساوی مثلثی استفاده شده است نه تجانس بودن نرم.)

دوگان L^p

فرض کنیم p و q نماهای مزدوج یکدیگر باشند. نامساوی هولدر نشان می دهد که هر $g \in L^q$ یک تابع خطی کراندار مانند

ϕ_g روی L^p با ضابطه

تعریف می‌کند و نرم عملگری ϕ_g حد اکثر $\|g\|_q$ است. (اگر $p=2$ و L^2 را به صورت فضای هیلبرت تصور کنیم، تعریف $\phi_g(f) = \int fg$ مناسب‌تر است. همین قرار داد را می‌توان برای $p \neq 2$ به کار برد بدون آنکه در احکام زیرین از نظر ماهیت روش تغییری ایجاد شود.) در واقع، نگاشت $g \rightarrow \phi_g$ تقریباً همیشه یک ایزومتری از L^q به توی $(L^p)^*$ است.

۱۳. ۶ گزاره. فرض کنیم p و q نماهای مزدوج یکدیگر باشند و $1 \leq q < \infty$. اگر $g \in L^q$ ، آنگاه

$$\|g\|_q = \|\phi_g\| = \sup \left\{ \left| \int fg \right| : \|f\|_p = 1 \right\}.$$

چنانچه μ نیمه متناهی باشد، حکم در حالت $q = \infty$ نیز برقرار است.

برهان. از نامساوی هولدر معلوم می‌شود که $\|\phi_g\| \leq \|g\|_q$ و اگر $g \neq 0$ ، تساوی بدیهی است. هرگاه $g \neq 0$ و $q < \infty$ فرض می‌کنیم

$$f = \frac{|g|^{q-1} \overline{\text{sgn } g}}{\|g\|_q^{q-1}}.$$

در این صورت

$$\|f\|_p^p = \frac{\int |g|^{(q-1)p}}{\|g\|_q^{(q-1)p}} = \frac{\int |g|^q}{\int |g|^q} = 1,$$

لذا

$$\|\phi_g\| \geq \int fg = \frac{\int |g|^q}{\|g\|_q^{q-1}} = \|g\|_q.$$

(اگر $q=1$ ، آنگاه $f = \overline{\text{sgn } g}$ ، $\|f\|_\infty = 1$ و $\int fg = \|g\|_1$) هرگاه $q = \infty$ ، برای $\varepsilon > 0$ فرض می‌کنیم $A = \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$. در این صورت $\mu(A) > 0$ ، لذا اگر μ نیمه متناهی باشد، $B \subset A$ چنان وجود دارد که $0 < \mu(B) < \infty$. فرض می‌کنیم $f = \mu(B)^{-1} \chi_B \overline{\text{sgn } g}$ ؛ در این صورت $\|f\|_1 = 1$ ، لذا

$$\|\phi_g\| \geq \int fg = \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

چون ε دل‌خواه است، $\|\phi_g\| = \|g\|_\infty$. ■

برعکس، اگر $f \rightarrow \int fg$ یک تابع خطی کراندار روی L^p باشد، آنگاه در همه حالات $g \in L^q$. در واقع، حکم قوی‌تری

برقرار است:

۶.۱۴ قضیه. فرض کنیم p و q نماهای مزدوج یکدیگر باشند. به علاوه، g را تابع اندازه‌پذیری روی X می‌انگاریم به طوری که برای هر f در فضای Σ متشکل از توابع ساده‌ای که خارج از مجموعه‌ای با اندازه متناهی صفر هستند کمیت

$$M_q(g) = \sup \left\{ \left| \int fg \right| : f \in \Sigma, \|f\|_p = 1 \right\}$$

متناهی است، عضویت $fg \in L^1$ برقرار باشد. همچنین، فرض می‌کنیم $S_g = \{x : g(x) \neq 0\}$ یک مجموعه σ -متناهی باشد یا μ نیمه متناهی باشد. در این صورت $g \in L^p$ و $M_q(g) = \|g\|_q$.

برهان. ابتدا یاد آوری می‌کنیم که اگر f تابع اندازه‌پذیر کراندار باشد که خارج از مجموعه‌ای با اندازه متناهی مانند E صفر است و $\|f\|_p = 1$ ، آنگاه $\left| \int fg \right| \leq M_q(g)$. در واقع، بنابر گزاره ۶.۱۰ دنباله‌ای مانند $\{f_n\}$ از توابع ساده وجود دارد به طوری که $|f_n| \leq |f|$ (بالاخص، f_n ها خارج از E صفر هستند) و $f_n \rightarrow f$ در حال چون $\chi_E \leq \|f\|_\infty$ و $\chi_E g \in L^1$ ، بنابر قضیه همگرایی مغلوب داریم: $\left| \int fg \right| = \lim \left| \int f_n g \right| \leq M_q(g)$.

اینک فرض می‌کنیم $q < \infty$. می‌توان S_g را σ -متناهی انگاشت، در صورت نیمه متناهی بودن μ . این شرط خود به خود برقرار می‌شود؛ تمرین ۱۷ را ببینید. فرض می‌کنیم $\{E_n\}$ دنباله‌ای صعودی از مجموعه‌هایی با اندازه‌های متناهی باشد به طوری که $S_g = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. $\phi_n = \chi_{E_n}$ را دنباله‌ای از توابع ساده می‌انگاریم به طوری که $\phi_n \rightarrow g$ نقطه به نقطه و $|\phi_n| \leq |g|$. سپس قرار می‌دهیم $g_n = \phi_n \chi_E$. در این صورت $g_n \rightarrow g$ نقطه به نقطه، $|g_n| \leq |g|$ و g_n خارج از E_n صفر است. حال قرار می‌دهیم:

$$f_n = \frac{|g_n|^{q-1} \operatorname{sgn} g}{\|g_n\|_q^{q-1}}$$

در این صورت همانند برهان ۶.۱۳ داریم $\|f_n\|_p = 1$ و بنابر لم فاتو

$$\|g\|_q \leq \liminf \|g_n\|_q = \liminf \int |f_n g_n| \leq \liminf \int |f_n g| = \liminf \int f_n g \leq M_q(g).$$

برای به دست آوردن آخرین نامساوی از یادآوری آغاز برهان استفاده کرده‌ایم. از طرف دیگر، از نامساوی هولدر معلوم می‌شود که $M_q(g) \leq \|g\|_q$ ، لذا برهان برای حالت $q < \infty$ کامل است. اینک فرض می‌کنیم $q = \infty$. $\varepsilon > 0$ را مفروض گرفته و قرار می‌دهیم: $A = \{x : |g(x)| \geq M_\infty(g) + \varepsilon\}$. اگر $\mu(A)$ مثبت بود می‌توانستیم $B \subset A$ را طوری انتخاب کنیم که $0 < \mu(B) < \infty$ (این یا به خاطر نیمه متناهی بودن μ است یا به خاطر این است که $A \subset S_g$). در نتیجه با قرار دادن $f = \mu(B)^{-1} \chi_B \operatorname{sgn} g$ بایستی داشته باشیم $\|f\|_1 = 1$ و $\int fg = \mu(B)^{-1} \int_B |g| \geq M_\infty(g) + \varepsilon$. اما بنابر یادآوری ابتدای برهان، چنین چیزی ممکن نیست. بنابر این $\|g\|_\infty \leq M_\infty(g)$ و نامساوی عکس بدیهی است. ■

(آخرین و عمیق‌ترین توصیف (L^p) این است که نگاشت $g \rightarrow \phi_g$ تقریباً در همه حالات پوشا است)

۱۵. ۶ گزاره. فرض کنیم p و q تمامای مزدوج یکدیگر باشند. هرگاه $1 < p < \infty$ ، برای هر $\phi \in (L^p)^*$ عضوی چون g از L^q وجود دارد به طوری که برای هر $f \in L^p$ ، $\phi(f) = \int fg$ ، و در نتیجه L^q به طور ایزومتریک با $(L^p)^*$ ایزومورف است. همین حکم برای $p=1$ نیز برقرار است مشروط بر اینکه μ یک اندازه σ -متناهی باشد.

برهان. نخست فرض می‌کنیم μ متناهی است و به همین سبب همه توابع ساده در L^p هستند. اگر $\phi \in (L^p)^*$ و E مجموعه‌ای اندازه‌پذیر باشد، فرض می‌کنیم $\nu(E) = \phi(\chi_E)$. برای هر دنباله مجزا مانند $\{E_j\}$ ، اگر $E = \bigcup_1^\infty E_j$ ، آنگاه $\chi_E = \sum_1^\infty \chi_{E_j}$ که در آن سری با نرم L^p همگرا است:

$$\|\chi_E - \sum_1^n \chi_{E_j}\|_p = \|\sum_{n+1}^\infty \chi_{E_j}\|_p = \mu(\bigcup_{n+1}^\infty E_j)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

(در این راستا به فرض $p < \infty$ نیاز داریم.) حال چون ϕ خطی و پیوسته است،

$$\nu(E) = \sum_1^\infty \phi(\chi_{E_j}) = \sum_1^\infty \nu(E_j),$$

بنابر این ν یک اندازه مختلط است. همچنین، اگر $\mu(E) = 0$ ، آنگاه χ_E به عنوان عضوی از L^p مساوی با صفر است لذا $\nu(E) = 0$ ؛ یعنی $\nu \ll \mu$. بنابر قضیه رادون-نیکودیم عضوی مانند g از $L^1(\mu)$ وجود دارد که برای هر E ، $\nu(E) = \int_E g d\mu$ و در نتیجه برای هر تابع ساده مانند f ، $\phi(f) = \int fg d\mu$. به علاوه، $\|\phi\|_p = \int |fg| \leq \|\phi\|_p \|f\|_p$ ، لذا بنابر قضیه ۱۴.۶، $g \in L^q$. این را از قبل می‌دانستیم. از گزاره ۷.۶ نتیجه می‌شود که برای هر $f \in L^p$ ، $\phi(f) = \int fg$. اکنون فرض می‌کنیم که μ یک اندازه σ -متناهی باشد. $\{E_n\}$ را دنباله‌ای صعودی از مجموعه‌هایی می‌گیریم که در آن $0 < \mu(E_n) < \infty$ و فرض می‌کنیم $X = \bigcup_1^\infty E_n$ و توافق می‌کنیم که $L^p(E_n)$ و $L^q(E_n)$ را با زیرفضاهایی از $L^p(X)$ و $L^q(X)$ یکی بگیریم که اعضایشان خارج از E_n صفر هستند. استدلال قبل نشان می‌دهد که برای هر n عضوی چون g_n از $L^q(E_n)$ وجود دارد به طوری که برای هر $f \in L^p(E_n)$ ، $\phi(f) = \int fg_n$ و $\|\phi|_{L^p(E_n)}\| \leq \|\phi\|$ با چشم پوشی از مجموعه‌های پوچ، g_n یکتا است، لذا برای $n < m$ روی E_n داریم $g_n = g_m$. g و با قرار دادن $g = g_n$ روی E_n می‌توان g را تقریباً همه جا روی X تعریف کرد. بنابر قضیه همگرایی یکنوا، داریم $\|\phi\| = \lim \|g_n\|_q$ ، لذا $g \in L^q$. به علاوه اگر $f \in L^p$ ، آنگاه از قضیه همگرایی مغلوب معلوم می‌شود که با نرم L^p ، $f \chi_{E_n} \rightarrow f$ و در نتیجه $\phi(f) = \lim \phi(f \chi_{E_n}) = \lim \int_{E_n} fg = \int fg$

بالاخره، فرض می‌کنیم μ دل‌خواه باشد و $p > 1$ و در نتیجه $q < \infty$. همانند فوق، روی هر مجموعه σ -متناهی مانند $E \subset X$ عضو تقریباً همه جا یکتایی مانند g_E از $L^q(E)$ به طوری که برای هر f از $L^p(E)$ ، $\phi(f) = \int fg_E$ و $\|\phi|_{L^p(E)}\| \leq \|\phi\|$ ، اگر F یک مجموعه σ -متناهی باشد و $F \supset E$ ، آنگاه $g_F = g_E$. g_F و g_E ؛ لذا $\|\phi|_{L^p(F)}\| \geq \|\phi|_{L^p(E)}\|$. فرض می‌کنیم M سوپریم $\|\phi|_{L^p(E)}\|$ ها باشد که در آن E روی تمام مجموعه‌های σ -متناهی تغییر می‌کند؛ توجه شود که $M \leq \|\phi\|$. دنباله‌ای مانند $\{E_n\}$ چنان انتخاب می‌کنیم که $M = \lim \|g_{E_n}\|_q$ و قرار می‌دهیم $F = \bigcup_1^\infty E_n$. در این صورت F یک مجموعه σ -متناهی

است و برای هر n ، $\|g_F\|_q \geq \|g_{E_n}\|_q$ که از اینجا معلوم می‌شود که $\|g_F\|_q = M$. اکنون اگر A یک مجموعه σ -متناهی شامل F باشد، داریم:

$$\int |g_F|^q + \int |g_{A \setminus F}|^q = \int |g_A|^q \leq M^q = \int |g_F|^q,$$

و بنابر این $g_{A \setminus F} = 0$ و $g_A = g_F$ است. (در اینجا از $q < \infty$ استفاده کرده‌ایم.) اما اگر $f \in L^p$ ، آنگاه $A = F \cup \{x : f(x) \neq 0\}$ یک مجموعه σ -متناهی است لذا $\phi(f) = \int fg_A = \int fg_F$ و بنابر این می‌توان g را g_F گرفت و برهان کامل می‌شود. ■

۱۶.۶ نتیجه. اگر $1 < p < \infty$ ، آنگاه L^p بازتابی است.

★ این بخش را با چند نکته مرتبط با حالت‌های استثنایی $p=1$ و $p=\infty$ خاتمه می‌دهیم. برای هر اندازه مانند μ ، تناظر ϕ_g را $g \mapsto \phi_g$ فضای L^∞ را به توی $(L^1)^*$ می‌نگارد، اما در حالت کلی، این نگاشت نه یک به یک است و نه پوشا. یک به یک بودن زمانی به هم می‌خورد که μ نیمه متناهی نباشد. در واقع، اگر $E \subset X$ مجموعه‌ای با اندازه نامتناهی باشد که شامل هیچ زیر مجموعه‌ای با اندازه مثبت نیست و $f \in L^1$ ، آنگاه $\{x : f(x) \neq 0\}$ یک مجموعه σ -متناهی است و در نتیجه با E در یک مجموعه پوچ اشتراک دارد. معلوم می‌شود که $\phi_{\chi_E} = 0$ هر چند که در L^∞ ، $\chi_E \neq 0$ ، البته، این معضل با تعریف مجدد L^∞ قابل حل است؛ تمرین‌های ۲۳ و ۲۴ را ببینید. عدم پوشایی خیلی ظریف است و بهتر است با یک مثال توضیح داده شود. تمرین ۲۵ را ببینید. فرض کنیم X مجموعه‌ای شمارش‌ناپذیر، μ اندازه شمارشی روی $(X, \mathcal{P}(X))$ ، \mathcal{M} مساوی با σ -جبر مجموعه‌های شمارش‌پذیر یا متمم شمارش‌پذیر و μ_0 تحدید μ به \mathcal{M} باشد. هر $f \in L^1(\mu)$ خارج از مجموعه شمارش‌پذیری صفر است و معلوم می‌شود که $L^1(\mu) = L^1(\mu_0)$. از طرف دیگر، $L^\infty(\mu)$ شامل همه توابع کراندار روی X است در حالی که $L^\infty(\mu_0)$ شامل توابع کراندار است که خارج از مجموعه‌ای شمارش‌پذیر، ثابت هستند. با آگاهی از این موضوع، به آسانی دیده می‌شود که دوگان $L^1(\mu_0)$ فضای $L^1(\mu)$ است و از فضای $L^\infty(\mu_0)$ کوچکتر نیست.

و اما حالت $p=\infty$: بنابر گزاره ۱۳.۶، نگاشت $g \mapsto \phi_g$ همواره یک ایزومتری یک به یک از L^1 به توی $(L^\infty)^*$ است، اما این نگاشت تقریباً هیچ‌گاه پوشا نیست. درباره این مطلب در بند ۶.۶ بیشتر توضیح خواهیم داد؛ هم اکنون مثال خاصی می‌آوریم. (در تمرین ۱۹ مثال دیگری می‌آید.)

فرض می‌کنیم $X = [0, 1]$ و μ اندازه لیگ باشد. نگاشت $f \mapsto f(0)$ یک تابع خطی کراندار روی $C(X)$ است که در آن $C(X)$ به صورت زیرفضایی از L^∞ در نظر گرفته شده است. بنابر قضیه هان - باناخ عضوی مانند ϕ از $(L^\infty)^*$ یافت می‌شود به طوری که برای هر $f \in C(X)$ ، $\phi(f) = f(0)$. برای دیدن اینکه نمی‌توان ϕ را با انتگرال گیری کنار یک تابع در L^1 به دست آورد، توابع $f_n \in C(X)$ با ضابطه $f_n(x) = \max(1-nx, 0)$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت برای

هر n ، $\phi(f_n) = f_n(0) = 1$ ، اما برای هر $x > 0$ ، $f_n(x) \rightarrow 0$. لذا بنابر قضیه همگرایی مغلوب برای هر $g \in L^1$ داریم:

$$\int f_n g \rightarrow 0 \quad \forall g \in \Phi \neq \Phi_g$$

تمرین‌ها

۱۷) با نمادگذاری قضیه ۱۴.۶، اگر $q < \infty$ و $M_q(g) < \infty$ و μ نیمه متناهی باشد، آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ مجموعه $\{x : |g(x)| > \varepsilon\}$ اندازه‌های متناهی دارد و از این رو S_g ، σ -متناهی است.

۱۸) دوگان خود بودن L^1 از نظریه فضاهاى هیلبرت (قضیه ۲۵.۵) نتیجه می‌شود، می‌توان به کمک این موضوع قضیه لگ - رادون - نیکودیم را با استدلال زیر که به فون نویمان نسبت داده شده است را اثبات کرد فرض کنید μ و ν اندازه‌های متناهی مثبتی روی (X, \mathcal{M}) باشند (حالت σ -متناهی به آسانی همانند بند ۲.۳ نتیجه می‌شود) و قرار می‌دهیم $\lambda = \mu + \nu$.

الف) نگاشت $f \mapsto \int f d\nu$ یک تابع خطی کراندار روی $L^1(\lambda)$ است، لذا به ازای عضوی چون g از $L^1(\lambda)$

$$\int f d\nu = \int f d\lambda \quad \text{به طور معادل، برای } f \in L^1(\lambda), \int f(1-g)d\nu = \int fgd\mu$$

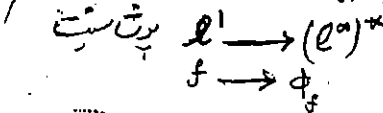
ب) $0 \leq g \leq 1$ (ت. ۵.۱) لذا می‌توان فرض کرد که همه جا $0 \leq g \leq 1$.

ج) فرض کنید $A = \{x : g(x) < 1\}$ ، $B = \{x : g(x) = 1\}$ و قرار دهید:

$$\nu_n(E) = \nu(A \cap E), \quad \nu_g(E) = \nu(B \cap E).$$

در این صورت $\mu \perp \nu_g$ و $\nu_n \ll \mu$ در واقع، $d\nu_n = g(1-g)^{-1} \chi_A d\mu$.

۱۹) $\phi_n \in (l^\infty)^*$ را با $\phi_n(f) = n^{-1} \sum_{j=1}^n f(j)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $\{\phi_n\}$ یک W^* -نقطه بستاری مانند ϕ دارد و ϕ عضوی از $(l^\infty)^*$ است که از عضوی از l^1 به دست نمی‌آید. (ت. ۵.۱)



۲۰) فرض کنیم $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$ و $f_n \rightarrow f$ (ت. ۵.۱)

الف) اگر $1 < p < \infty$ ، آنگاه $f_n \rightarrow f$ به طور ضعیف در L^p . (برای هر $g \in L^q$ که در آن p و q نماهای مزدوج هستند و برای $\varepsilon > 0$: (i) عددی مانند $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $\mu(E) < \infty$ ، آنگاه $\int_E |g|^q < \varepsilon$ (ii) زیرمجموعه‌ای چون A از X وجود دارد به طوری که $\mu(A) < \infty$ و $\int_{X \setminus A} |g|^q < \varepsilon$ و (iii) زیر مجموعه‌ای چون $B \subset A$ وجود دارد به طوری که $\mu(A \setminus B) < \delta$ و $f_n \rightarrow f$ به طور یکنواخت بر B .)

(ب) حکم (الف) برای $p = 1$ در حالت کلی درست نیست. (مثال‌های نقضی در $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{M})$ و l^1 بیابید) اما اگر μ یک اندازه σ -متناهی باشد و همگرایی ضعیف را با W^* -همگرایی جایگزین کنیم حکم (الف) برای $p = \infty$ درست است.

(۲۱) هرگاه $1 < p < \infty$ ، $f_n \rightarrow f$ به طور ضعیف در $L^p(A)$ اگر و تنها اگر $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$ و $f_n \rightarrow f$ نقطه به نقطه.

(۲۲) $X = [0, 1]$ را همراه با اندازه لبگ بگیرید.

(الف) فرض کنید $f_n(x) = \cos 2\pi n x$. در این صورت $f_n \rightarrow 0$ به طور ضعیف در L^1 (تمرین ۶۳ از بند ۵.۵ را ببینید) اما $f_n \not\rightarrow 0$ در اندازه.

(ب) فرض کنید $f_n(x) = n\chi_{(0, 1/n)}$. در این صورت $f_n \rightarrow 0$ در اندازه، اما برای هر p ، $f_n \not\rightarrow 0$ به طور ضعیف در L^p .

(۲۳) فرض کنید (X, \mathcal{M}, μ) یک فضای اندازه باشد. مجموعه‌ای $E \in \mathcal{M}$ موضعاً پوچ نامیده می‌شود هرگاه برای هر $F \in \mathcal{M}$ با شرط $\mu(F) < \infty$ ، $\mu(E \cap F) = 0$. اگر $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ یک تابع اندازه‌پذیر باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_* = \inf\{a : \text{موضعاً پوچ است } \{x : |f(x)| > a\}\},$$

و فرض می‌کنیم $\mathcal{L}^\infty = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ فضای همه توابع اندازه‌پذیر چون f باشد به طوری که $\|f\|_* < \infty$. دو تابع $f, g \in \mathcal{L}^\infty$ را یکی می‌گیریم هرگاه $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ موضعاً پوچ باشد.

(الف) اگر E موضعاً پوچ باشد، آنگاه $\mu(E) = 0$ یا صفر است یا بینهایت. اگر μ نیمه متناهی باشد، آنگاه هر مجموعه موضعاً پوچ، پوچ است.

(ب) $\|\cdot\|_*$ نرمی روی \mathcal{L}^∞ است که آن را به یک فضای باناخ تبدیل می‌کند. اگر μ نیمه متناهی باشد، آنگاه $\mathcal{L}^\infty = L^\infty$.

(۲۴) اگر $g \in \mathcal{L}^\infty$ ، آنگاه $\|g\|_* = \sup\{|\int fg| : \|f\|_1 = 1\}$ (تمرین ۲۳ را ببینید). لذا نگاشت $g \mapsto \phi$ یک ایزومتري از \mathcal{L}^∞ به توی $(L^1)^*$ است. به عکس، اگر همچون قضیه ۶.۱۴، $M_\infty(g) < \infty$ ، آنگاه $g \in \mathcal{L}^\infty$ و $M_\infty(g) = \|g\|_*$.

(۲۵) فرض کنیم μ تجزیه‌ناپذیر باشد (تمرین ۱۵ از بند ۳.۲ را ببینید). در این صورت هر $\phi \in (L^1)^*$ به ازای عضوی چون $g \in \mathcal{L}^\infty$ به شکل $\phi(f) = \int fg$ است و از این رو $(L^1)^* \cong \mathcal{L}^\infty$ (تمرین‌های ۲۳ و ۲۴). اگر F تجزیه‌ای از μ باشد و $f \in L^1$ ، آنگاه دنباله‌ای چون $\{E_n\} \subset F$ وجود دارد به طوری که $f = \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{E_n}$ و سری اخیر در L^1 همگرا است.

۳.۶ برخی انتگرال های سودمند

برآوردها و انتگرال ها در قلب کاربردهای فضاهای L^p در آنالیز جای دارند. اساسی ترین آنها نامساوی های هولدر و مینکوفسکی هستند. در خلال این بخش چند نمونه از احکام مهم دیگر در این حیطة ارائه می دهیم. اولین آنها تقریباً یک چیز بدیهی است، اما به قدر کافی مفید است که عنایت خاصی به آن داشته باشیم.

۱۷.۶ نامساوی چبیشف. اگر $f \in L^p$ ($0 < p < \infty$)، آنگاه برای هر $\alpha > 0$ ،

$$\mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

برهان. فرض می کنیم $E_\alpha = \{x : |f(x)| > \alpha\}$ در این صورت

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p \geq \int_{E_\alpha} |f|^p \geq \alpha^p \int_{E_\alpha} 1 = \alpha^p \mu(E_\alpha). \blacksquare$$

حکم بعدی قضیه ای نسبتاً کلی درباره کرانداری عملگرهای انتگرال روی فضاهای L^p است.

۱۸.۶ قضیه. (X, \mathcal{M}, μ) و (Y, \mathcal{N}, ν) را دو فضای اندازه σ -متناهی و K را یک تابع $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ -اندازه پذیر روی $X \times Y$ می انگاریم. فرض می کنیم $C > 0$ چنان وجود داشته باشد که تقریباً برای هر $y \in Y$ ، $\int |K(x, y)| d\mu(x) \leq C$ و تقریباً برای هر $x \in X$ ، $\int |K(x, y)| d\nu(y) \leq C$ و $1 \leq p < \infty$ اگر $f \in L^p(\nu)$ آنگاه انتگرال

$$Tf(x) = \int K(x, y)f(y) d\nu(y)$$

تقریباً برای هر $x \in X$ مطلقاً همگرا است، تابع Tf که بدین ترتیب تعریف می شود در $L^p(\mu)$ و $\|Tf\|_p \leq C \|f\|_p$.

برهان. فرض کنیم $1 \leq p < \infty$ و q نمای مزدوج با p باشد. با به کارگیری نامساوی هولدر در مورد حاصلضرب

$$|K(x, y)f(y)| = |K(x, y)|^{\frac{1}{q}} \left| |K(x, y)|^{\frac{1}{p}} |f(y)| \right|$$

تقریباً برای هر $x \in X$ داریم

$$\begin{aligned} \int |K(x, y)f(y)| d\nu(y) &\leq \left[\int |K(x, y)| d\nu(y) \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int |K(x, y)| |f(y)|^p d\nu(y) \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C^{\frac{1}{q}} \left[\int |K(x, y)| |f(y)|^p d\nu(y) \right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

بنابر این، طبق قضیه تونلی

$$\int \left[\int |K(x, y) f(y)| d\nu(y) \right]^p d\mu(x) \leq C^{\frac{p}{q}} \int \int |K(x, y)| |f(y)|^p d\nu(y) d\mu(x),$$

$$\leq C^{\frac{p}{q}+1} \int |f(y)|^p d\nu(y).$$

چون انتگرال اخیر متناهی است، لذا قضیه فوبینی ایجاب می کند که تقریباً برای هر x ، $K(x, \cdot) f \in L^1(\nu)$ ، بنا بر این Tf تقریباً همه جا خوشتعریف است، و

$$\int |Tf(x)|^p d\mu(x) \leq C^{\frac{p}{q}+1} \|f\|_p^p.$$

با ریشه p گرفتن حکم به دست می آید. اثبات برای حالت $p = 1$ مشابه اما آسان تر است و فقط فرض $\int |K(x, y)| d\mu(x) \leq C$ لازم است؛ اثبات برای حالت $p = \infty$ بدیهی است و فقط فرض $\int |K(x, y)| d\nu(y) \leq C$ مورد نیاز است. جزئیات به خواننده واگذار می شود (تمرین ۲۶). ■

نامساوی مینکوفسکی بیان می دارد که L^p - نرم یک مجموع حداکثر جمع L^p - نرم ها است. تعمیمی از این حکم وجود دارد که در آن مجموع ها با انتگرال ها جایگزین می شوند:

۱۹. نامساوی مینکوفسکی برای انتگرال ها، فرض کنیم (X, \mathcal{M}, μ) و (Y, \mathcal{N}, ν) دو فضای اندازه σ - متناهی و f یک تابع $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ - اندازه پذیر روی $X \times Y$ باشد. الف) اگر $f \geq 0$ و $1 \leq p < \infty$ ، آنگاه

$$\left[\int \left(\int f(x, y) d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int \left[\int f(x, y)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y).$$

ب) اگر $1 \leq p \leq \infty$ ، تقریباً برای هر y ، $f(\cdot, y) \in L^p(\mu)$ و تابع $\|f(\cdot, y)\|_p \mapsto L^1(\nu)$ باشد، آنگاه تقریباً برای هر x ، $f(x, \cdot) \in L^1(\nu)$ ، تابع در $L^p(\mu)$ در $x \mapsto \int f(x, y) d\nu(y)$ است، و

$$\left\| \int f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_p \leq \int \|f(\cdot, y)\|_p d\nu(y).$$

برهان. اگر $p = 1$ ، الف) همان قضیه تونلی است. اگر $1 < p < \infty$ ، فرض می کنیم q نمای مزدوج با p باشد و $g \in L^q(\mu)$ در این صورت بنا بر قضیه تونلی و نامساوی هولدر،

$$\int \left[\int f(x, y) d\nu(y) \right] |g(x)| d\mu(x) = \int \int f(x, y) |g(x)| d\mu(x) d\nu(y)$$

$$\leq \|g\|_q \int \left[\int f(x, y)^p d\mu(x) \right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y).$$

بنا بر حکم الف) از قضیه ۱۴. ۶ نتیجه می شود. وقتی $p < \infty$ ، ب) از الف) (با جایگزینی $|f|$ به جای f) و قضیه فوبینی نتیجه می شود؛ وقتی $p = \infty$ ، قسمت ب) نتیجه نامساوی از کتابی است. ■

آخرین حکم این بخش قضیه‌های در مورد عملگرهای انتگرال روی $(0, \infty)$ با اندازه لبگ است.

۶.۲۰. قضیه. فرض کنیم K یک تابع اندازه پذیر لبگ روی $(0, \infty) \times (0, \infty)$ باشد به طوری که برای هر $\lambda > 0$

$$K(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-1} K(x, y)$$

$$\int_0^\infty |K(x, 1)| x^{-1} dx = C < \infty$$

و q را نمای مزدوج با p می‌انگاریم. برای $f \in L^p$ و $g \in L^q$ فرض می‌کنیم:

$$Tf(y) = \int_0^\infty K(x, y) f(x) dx \quad \text{و} \quad Sg(x) = \int_0^\infty K(x, y) g(y) dy$$

$$\|Sg\|_q \leq C \|g\|_q \quad \text{و} \quad \|Tf\|_p \leq C \|f\|_p$$

تعریف شده اند، و برهان. با قرار دادن $z = \frac{x}{y}$ داریم

$$\int_0^\infty |K(x, y) f(x)| dx = \int_0^\infty |K(yz, y) f(yz)| y dz = \int_0^\infty |K(z, 1) f_z(y)| dz$$

که در آن $f_z(y) = f(yz)$ ؛ به علاوه،

$$\|f_z\|_p = \left[\int_0^\infty |f(yz)|^p dy \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_0^\infty |f(x)|^p |z^{-1} dx| \right]^{\frac{1}{p}} = z^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p$$

بنابر این، طبق نامساوی مینکوفسکی برای انتگرال‌ها، Tf تقریباً همه جا وجود دارد و

$$\|Tf\|_p \leq \int_0^\infty |K(z, 1)| \|f_z\|_p dz = \|f\|_p \int_0^\infty |K(z, 1)| z^{-\frac{1}{p}} dz = C \|f\|_p.$$

بالاخره، با قرار دادن $u = y^{-1}$ داریم

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |K(1, y)| y^{-\frac{1}{q}} dy &= \int_0^\infty |K(y^{-1}, 1)| y^{-1-\frac{1}{q}} dy \\ &= \int_0^\infty |K(u, 1)| u^{-\frac{1}{p}} du = C. \end{aligned}$$

و همین استدلال نشان می‌دهد که Sg تقریباً همه جا تعریف می‌شود و $\|Sg\|_q \leq q \|g\|_q$.

۶.۲۱. نتیجه. فرض کنیم

$$Tf(y) = y^{-1} \int_0^y f(x) dx, \quad Sg(x) = \int_x^\infty y^{-1} g(y) dy.$$

در این صورت برای $1 < p \leq \infty$ و $1 \leq q < \infty$

$$\|Tf\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p, \quad \|Sg\|_q \leq \|g\|_q.$$

برهان. فرض کنیم $K(x, y) = y^{-1} \chi_E(x, y)$ که در آن $E = \{(x, y) : x < y\}$. در این صورت

$$\int_0^\infty |K(x, y)| x^{\frac{-1}{p}} dx = \int_0^\infty x^{\frac{-1}{p}} dx = \frac{p}{p-1} = q \quad (۰ < x < y < \infty)$$

که در آن q نمای مزدوج با p است، بنابراین، قضیه ۶.۲۰ حکم را به دست می‌دهد. ■

نتیجه ۶.۲۱ حالت خاصی از نامساوی‌های هاردی است؛ حکم کلی در قالب تمرین ۲۹ جای گرفته است.

تمرین‌ها

(۲۶) برهان قضیه ۶.۱۸ را برای حالات $p=1$ و $p=\infty$ بنویسید.

(۲۷) نامساوی هیلبرت عملگر $Tf(x) = \int_0^\infty (x+y)^{-1} f(y) dy$ برای $1 < p < \infty$ در نامساوی $\|Tf\|_p \leq C_p \|f\|_p$

صدق می‌کند که در آن $C_p = \int_0^\infty x^{\frac{-1}{p}} (x+1)^{-1} dx$. (چنانچه معلوماتی در رابطه با انتگرال‌های کانتور دارید؛ نشان دهید

$$C_p = \pi \csc\left(\frac{\pi}{p}\right).$$

(۲۸) همانند تمرین ۶۱ از بند ۶.۲ فرض کنید I_α ، α آمین تابع عملگر انتگرال باشد و

$$J_\alpha f(x) = x^{-\alpha} I_\alpha f(x).$$

الف) برای $1 < p \leq \infty$ روی $L^p(0, \infty)$ کراندار است؛ به‌طور دقیق‌تر،

$$\|J_\alpha f\|_p \leq \frac{\Gamma(1-p^{-1})}{\Gamma(\alpha+1-p^{-1})} \|f\|_p.$$

ب) $f \in L^1(0, \infty)$ وجود دارد که $J_\alpha f \notin L^1(0, \infty)$.

(۲۹) فرض کنیم $1 \leq p < \infty$ ، $r > 0$ و h یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی روی $(0, \infty)$ باشد.

در این صورت:

$$\int_0^\infty x^{-r-1} \left[\int_0^x h(y) dy \right]^p dx \leq \left(\frac{p}{r}\right)^p \int_0^\infty x^{p-r-1} h(x)^p dx,$$

$$\int_0^\infty x^{r-1} \left[\int_x^\infty h(y) dy \right]^p dx \leq \left(\frac{p}{r}\right)^p \int_0^\infty x^{p+r-1} h(x)^p dx.$$

(قضیه ۶.۲۰ را با $K(x, y) = x^{\beta-1}y^{-\beta}\chi_{(0, \infty)}(y-x)$ ، $f(x) = x^\gamma h(x)$ و $g(x) = x^\delta h(x)$ برای β, γ و δ مناسب به کار برید.)

(۳۰) فرض کنیم K یک تابع اندازه پذیر نامنفی روی $(0, \infty)$ باشد به طوری که برای $0 < s < 1$ ،

$$\int_0^\infty K(x)x^{s-1}dx = \phi(s) < \infty.$$

(الف) اگر $1 < p < \infty$ ، $1 < q$ و $p^{-1} + q^{-1} = 1$ و f و g توابعی اندازه پذیر و نامنفی روی $(0, \infty)$ باشند، آنگاه (با فرض

$$\int = \int_0^\infty$$

$$\iint K(xy)f(x)g(y)dx dy \leq \phi(p^{-1}) \left[\int x^{p-1} dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int g(x)^q dx \right]^{\frac{1}{q}}.$$

(ب) عملگر $Tf(x) = \int_0^\infty K(xy)f(y)dy$ روی $L^1((0, \infty))$ کراندار است و نرمش حداکثر $\phi(\frac{1}{p})$ است. (حالت خاص جالب توجه: اگر $K(x) = e^{-x}$ ، آنگاه T تبدیل لاپلاس است و $\phi(s) = \Gamma(s)$.)

(۳۱) (تعمیمی از نامساوی هولدر) فرض کنیم $1 \leq p_j \leq \infty$ و $1 \leq r$ و $\sum_1^n p_j^{-1} = r^{-1} \leq 1$. اگر برای $j = 1, \dots, n$ ، $f_j \in L^{p_j}$ ، آنگاه $\prod_1^n f_j \in L^r$ و $\|\prod_1^n f_j\|_r \leq \prod_1^n \|f_j\|_{p_j}$. (نخست حالت $n=2$ را انجام دهید.)

(۳۲) فرض کنیم (X, \mathcal{M}, μ) و (Y, \mathcal{N}, ν) دو فضای اندازه σ -متناهی باشند و $K \in L^1(\mu \times \nu)$. اگر $f \in L^1$ ، آنگاه انتگرال $Tf(x) = \int K(x, y)f(y)d\nu(y)$ تقریباً برای هر x از X مطلقاً همگرا است؛ به علاوه، $Tf \in L^1(\mu)$ و $\|Tf\|_1 \leq \|K\|_1 \|f\|_1$.

(۳۳) برای $1 < p < \infty$ ، فرض کنید $Tf(x) = x^{-\frac{1}{p}} \int_0^x f(t)dt$. اگر $1 < p < \infty$ ، آنگاه T یک نگاشت خطی کراندار از $L^p((0, \infty))$ به $C_0((0, \infty))$ است.

(۳۴) اگر برای $0 < \varepsilon < 1$ تابع f روی $[\varepsilon, 1]$ مطلقاً پیوسته باشد و $\int_0^1 x|f'(x)|^p dx < \infty$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وجود

دارد (و متناهی است هرگاه $p > 2$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|\log x|^{\frac{1}{p}}} = 0$ ، هرگاه $p = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{x^{1-1/p}} = 0$ ، هرگاه $p < 2$.)

۶.۴ توابع توزیع و L^p های ضعیف.

هرگاه f تابع اندازه پذیری روی (X, \mathcal{M}, μ) باشد، تابع توزیعش $[0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ را با ضابطه زیر تعریف می کنیم:

$$\lambda_f(\alpha) = \mu(\{x : |f(x)| > \alpha\}).$$

(این تعریف تا حدودی به تعریف «توابع توزیع» مورد بحث در بندهای ۱.۵ و ۱.۱ مربوط است اما با آن یکی نیست.)
خواص اساسی λ_f را در یک گزاره گرد هم می آوریم:

۶.۲۲ گزاره.

الف) λ_f نزولی و از راست پیوسته است.

ب) اگر $|f| \leq |g|$ ، آنگاه $\lambda_f \leq \lambda_g$.

ج) اگر $|f_n|$ به $|f|$ صعود کند، آنگاه λ_{f_n} به λ_f صعود می کند.

د) اگر $f = g + h$ ، آنگاه $\lambda_f(\alpha) \leq \lambda_g(\frac{1}{2}\alpha) + \lambda_h(\frac{1}{2}\alpha)$.

برهان. فرض کنیم $E(\alpha, f) = \{x : |f(x)| > \alpha\}$. تابع λ_f نزولی است زیرا اگر $\alpha < \beta$ آنگاه $E(\alpha, f) \supset E(\beta, f)$ ؛ همچنین λ_f از راست پیوسته است زیرا $E(\alpha, f)$ اجتماع صعودی $\{E(\alpha + n^{-1}, f)\}_{n=1}^{\infty}$ است. اگر $|f| \leq |g|$ ، آنگاه $E(\alpha, f) \subset E(\alpha, g)$ ، لذا $\lambda_f \leq \lambda_g$. اگر $|f_n|$ به $|f|$ صعود کند، آنگاه $E(\alpha, f) \subset E(\alpha, f_n)$ اجتماع صعودی $\{E(\alpha, f_n)\}$ است، لذا λ_{f_n} به λ_f صعود می کند. بالاخره، اگر $f = g + h$ ، آنگاه $E(\frac{1}{2}\alpha, f) \subset E(\frac{1}{2}\alpha, g) \cup E(\frac{1}{2}\alpha, h)$ که این هم نامساوی $\lambda_f(\alpha) \leq \lambda_g(\frac{1}{2}\alpha) + \lambda_h(\frac{1}{2}\alpha)$ را ایجاب می کند. ■

فرض کنیم برای هر $\alpha > 0$ ، $\lambda_f(\alpha) < \infty$. با توجه به قسمت الف) از گزاره ۶.۲۲، λ_f یک اندازه برل منفی مانند ν روی $(0, \infty)$ تعریف می کند به طوری که وقتی $0 < a < b$ ، $\nu((a, b]) = \lambda_f(b) - \lambda_f(a)$. (نحوه ساخت اندازه های برل روی \mathbb{R} در بند ۱.۵ به همان صورت روی $(0, \infty)$ نیز کار می کنند.) بنابر این می توانیم انتگرال های لبگ - اشتیلیس $\int \phi d\lambda_f = \int \phi d\nu$ از توابع ϕ روی $(0, \infty)$ را در نظر بگیریم. حکم زیر نشان می دهد که انتگرال های تابع هایی از $|f|$ روی X را می توان با چنین انتگرال های لبگ - اشتیلیس جایگزین کرد.

۶.۲۳ گزاره. اگر برای هر $\alpha > 0$ ، $\lambda_f(\alpha) < \infty$ و ϕ یک تابع اندازه پذیر برل نامنفی روی $(0, \infty)$ باشد، آنگاه

$$\int_X \phi \circ |f| d\mu = - \int_0^{\infty} \phi(\alpha) d\lambda_f(\alpha).$$

$$\nu((a, b]) = \lambda_f(b) - \lambda_f(a) = -\mu(\{x : a < |f(x)| \leq b\}) = -\mu(|f|^{-1}((a, b])).$$

از یکتایی توسیع (قضیه ۱.۱۴) معلوم می‌شود که برای هر مجموعه برل مانند $E \subset (0, \infty)$,

$$\nu(E) = -\mu(|f|^{-1}(E)).$$

اما این بدان معناست که وقتی ϕ تابع مشخصه یک مجموعه برل باشد تساوی $\int_X \phi \circ |f| d\mu = -\int_0^\infty \phi(\alpha) d\lambda_f(\alpha)$ برقرار است و در نتیجه این تساوی برای توابع ساده ϕ نیز برقرار می‌شود. حالت کلی به واسطه قضیه ۲.۱۰ و قضیه همگرایی یکنوا حاصل شود. ■

حالتی از این حکم که برایمان خوشایند است $\phi(\alpha) = \alpha^p$ می‌باشد که تساوی زیر را به دست می‌دهد:

$$\int |f|^p d\mu = -\int_0^\infty \alpha^p d\lambda_f(\alpha).$$

با انتگرالگیری جزء به جزء از طرفین (قضیه ۳.۳۶) برای به دست آوردن

$$\int |f|^p d\mu = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha) d\alpha.$$

شکل مفیدتری از تساوی اخیر به دست می‌آید. اعتبار این محاسبه واضح نیست مگر اینکه بدانیم وقتی $\alpha \rightarrow \infty$ یا $\alpha \rightarrow 0$ ، $\alpha^p \lambda_f(\alpha) \rightarrow 0$ محاسبه فوق درست است.

۶.۲۴ گزاره. اگر $0 < p < \infty$ ، آنگاه

$$\int |f|^p d\mu = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha) dx.$$

برهان. اگر برای $\alpha > 0$ ، $\lambda_f(\alpha) = \infty$ ، آنگاه هر دو انتگرال نامتناهی هستند. اگر چنین نباشد و f ساده باشد، آنگاه وقتی $\alpha \rightarrow 0$ ، λ_f کراندار است و برای α های به قدر کافی بزرگ λ_f صفر می‌شود، لذا انتگرالگیری جزء به جزء توصیف شده فوق معتبر است. (در این حالت نیز درستی فرمول به آسانی و به طور مستقیم بررسی می‌شود.) برای حالت کلی، فرض می‌کنیم $\{g_n\}$ دنباله‌های از توابع ساده باشد که به $|f|$ صعود می‌کنند؛ در این صورت حکم خواسته شده برای g_n درست است و درستی آن برای f از قسمت (ج) از گزاره ۶.۲۲ و قضیه همگرایی یکنوا نتیجه می‌شود. ■

شکلی از فضاها L^p که اغلب زیاد پیش می‌آید نوع زیر است. هرگاه f یک تابع اندازه‌پذیر روی X باشد و $0 < p < \infty$ ، تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_p = (\sup_{\alpha > 0} \alpha^p \lambda_f(\alpha))^{1/p},$$

و L^p ی ضعیف را مجموعه همه توابعی چون f تعریف می‌کنیم که برای آنها $\|f\|_p < \infty$ ، $[f]_p$ یک نرم نیست؛ درستی تساوی $\|cf\|_p = |c| \|f\|_p$ به آسانی محقق می‌شود، اما نامساوی مثلثی درست نیست. اما L^p ی ضعیف یک فضای برداری توپولوژیک است؛ تمرین ۳۵ را ببینید.

رابطه بین L^p و L^p ی ضعیف به صورت زیر است:

از یک سو، L^p زیرمجموعه‌ای از L^p ی ضعیف است و $\|f\|_p \leq \|f\|_p$ (این درست بیان مجدد نامساوی چیشف است). از سوی دیگر، اگر در انتگرال $\int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha) d\alpha$ که با $\|f\|_p^p$ برابر است به جای $\lambda_p(\alpha)$ کمیت $(\|f\|_p / \alpha)^p$ را قرار دهیم، مضرب ثابتی از $\int_0^\infty \alpha^{-1} d\alpha$ به دست می‌آوریم که هم در 0 و هم در ∞ واگرا است. اما فقط و فقط در همین دو مورد واگرا است. تنها کمی تخمین قوی‌تر روی λ_f در نزدیکی 0 و ∞ لازم است تا $f \in L^p$ به دست آید. (تمرین ۳۶ را نیز ببینید.)

مثال متعارفی از تابعی که در L^p ی ضعیف واقع است اما در L^p نیست تابع $f(x) = x^{-1/p}$ بر $(0, \infty)$ (با اندازه لبگ) است. غالباً بیان یک تابع به صورت مجموع یک بخش «کوچک» و یک بخش «بزرگ» کارگشا است. گزاره زیر روشی برای انجام این کار است که فرمولی ساده برای توابع توزیع به دست می‌دهد.

۲۵. ۶ گزاره. هر گاه f یک تابع اندازه‌پذیر باشد و $A > 0$ ، فرض می‌کنیم $E(A) = \{x : |f(x)| > A\}$ و قرار می‌دهیم:

$$h_A = f \chi_{X \setminus E(A)} + A(\operatorname{sgn} f) \chi_{E(A)}, \quad g_A = f - h_A = (\operatorname{sgn} f)(|f| - A) \chi_{E(A)}.$$

در این صورت

$$\lambda_{g_A}(\alpha) = \lambda_f(\alpha + A), \quad \lambda_{h_A}(\alpha) = \begin{cases} \lambda_f(\alpha) & \alpha < A, \\ 0 & \alpha \geq A. \end{cases}$$

برهان به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۳۷)

تمرین‌ها

(۳۵) برای همه توابع اندازه‌پذیر f و g داریم $\|cf\|_p = |c| \|f\|_p$ و $\|f+g\|_p \leq \sqrt{\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2}$ ؛ بنابر این L^p ی ضعیف یک فضای برداری است. به علاوه، «گوی» $\{g : \|g-f\|_p < r\}$ ($r > 0$) و L^p ی ضعیف) $f \in$ یک توپولوژی روی L^p ی ضعیف تولید می‌کند که L^p ی ضعیف را به یک فضای برداری توپولوژیک تبدیل می‌کند.

(۳۶) اگر f عضوی از L^p ی ضعیف باشد و $\mu(\{x: f(x) \neq 0\}) < \infty$ ، آنگاه برای هر $q < p$ ، $f \in L^q$ از سوی دیگر، اگر $f \in L^q \cap L^\infty$ ی ضعیف، آنگاه برای هر $q > p$ ، $f \in L^q$.

(۳۷) گزاره ۲۵.۶ را ثابت کنید.

$$(38) \sum_{-\infty}^{\infty} 2^{kp} \lambda_f(2^k) < \infty \text{ اگر و تنها اگر } f \in L^p$$

(۳۹) اگر $f \in L^p$ ، آنگاه $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^p \lambda_f(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^p \lambda_p(\alpha) = 0$ (ابتدا فرض کنید f ساده است).

(۴۰) هرگاه تابعی اندازه پذیر روی X باشد، بازآرایی نزولی آن تابع $f^*: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ است که با ضابطه زیر تعریف می شود:

$$f^*(t) = \inf\{\alpha: \lambda_f(\alpha) \leq t\}$$

که در آن $\inf \emptyset = \infty$:

(الف) $f^*(\lambda_f(\alpha)) \leq \alpha$ آنگاه $\lambda_f(\alpha) < \infty$ و اگر $\lambda_f(f^*(t)) \leq t$ آنگاه $f^*(t) < \infty$ است. اگر $f^*(t) < \infty$ ، آنگاه $\lambda_f(\alpha) < \infty$ و اگر $\lambda_f(\alpha) < \infty$ ، آنگاه $f^*(\lambda_f(\alpha)) \leq \alpha$.

(ب) $\lambda_f = \lambda_{f^*}$ که در آن نسبت به اندازه لبگ روی $(0, \infty)$ تعریف می شود.

(ج) اگر برای هر $\alpha > 0$ ، $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \lambda_f(\alpha) < \infty$ (و در نتیجه برای هر $t > 0$ ، $f^*(t) < \infty$) و ϕ یک تابع اندازه پذیر نامنفی روی $(0, \infty)$ باشد، آنگاه $\int_X \phi \circ |f| d\mu = \int_0^\infty \phi \circ f^*(t) dt$. به ویژه برای $0 < p < \infty$ ،

$$\|f\|_p = \|f^*\|_p$$

(د) اگر $0 < p < \infty$ ، آنگاه $[f]_p = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)$.

(ه) نام «بازآرایی» برای f^* از حالتی آمده است که f یک تابع نامنفی روی $(0, \infty)$ است. برای دیدن اینکه چرا این نام

مناسبی است یک تابع پله ای روی $(0, \infty)$ برگزینید که چهار یا پنج مقدار متمایز به خود می گیرد و سپس نمودارهای f و

f^* را رسم کنید.

۵.۶ درون یابی فضاهای L^p

اگر $1 \leq p < q < r \leq \infty$ ، آنگاه $(L^p \cap L^r) \subset L^q \subset (L^p + L^r)$ و طبیعی است بپرسیم که آیا عملگری خطی مانند T روی $L^p + L^r$ که هم روی L^p و هم روی L^r کراندار است روی L^q نیز کراندار است؟ پاسخ مثبت است و این حکم را به

روش‌های مختلفی می‌توان تعمیم دارد. دو قضیه بنیادی دخیل در این سؤال، قضایای ریس-تورین و درونیایی مینکوفسکی هستند که آنها را در این بخش ذکر می‌کنیم.
با قضیه ریس-تورین شروع می‌کنیم که اثباتش برحکم زیرین از نظریه توابع مختلط استوار است.

۶.۲۶. لم سه خط. فرض کنیم ϕ تابع پیوسته کرانداری بر نوار $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ باشد که بر درون نوار تحلیلی است. اگر برای $\operatorname{Re} z = 0$ داشته باشیم $|\phi(z)| \leq M_0$ و برای $\operatorname{Re} z = 1$ ، $|\phi(z)| \leq M_1$ ، آنگاه برای $0 < t < 1$ ،
 $|\phi(z)| \leq M_0^{1-t} M_1^t$

برهان. برای $\varepsilon > 0$ فرض می‌کنیم $\phi_\varepsilon(z) = \phi(z) M_0^{z-1} M_1^{-z} \exp(\varepsilon z(z-1))$. در این صورت با جایگزینی ۱ به جای M_0 و M_1 نگاهت ϕ_ε در مفروضات لم صدق می‌کند و وقتی $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$ ، $|\phi_\varepsilon(z)| \rightarrow 0$. بنابراین روی مرز مستطیل $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ ، $-A < \operatorname{Im} z \leq A$ ، $|\phi_\varepsilon(z)| \leq 1$ مشروط بر اینکه A بزرگ باشد و در نتیجه، اصل «حداکثر قدر مطلق است» ایجاب می‌کند که $|\phi_\varepsilon(z)| \leq 1$ بر نوار $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ ، با فرض $\varepsilon \rightarrow 0$ حکم مطلوب به دست می‌آید: برای $\operatorname{Re} z = t$

$$|\phi(z)| M_0^{t-1} M_1^{-t} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\phi_\varepsilon(z)| \leq 1. \blacksquare$$

۶.۲۷. قضیه درونیایی ریس-تورین. فرض کنیم (X, \mathcal{M}, μ) و (Y, \mathcal{N}, ν) دو فضای اندازه باشند و

$$p_0, p_1, q_0, q_1 \in [1, \infty].$$

هرگاه $q_0 = q_1 = \infty$ ، فرض می‌کنیم ν نیمه متناهی باشد. برای $0 < t < 1$ ، p_t و q_t را با تساوی‌های زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

اگر T نگاشتی خطی از $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ بتوی $L^{q_0}(\nu) + L^{q_1}(\nu)$ باشد به قسمی که برای هر $f \in L^{p_0}(\mu)$ ، $\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}$ و برای هر $f \in L^{p_1}(\mu)$ ، $\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}$ ، آنگاه برای هر $f \in L^{p_t}(\mu)$ (هر $0 < t < 1$)،
 $\|Tf\|_{q_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}$

برهان. در وهله اول، ملاحظه می‌شود که حکم در حالت $p_0 = p_1$ از گزاره ۶.۱۰ نتیجه می‌شود: اگر $p = p_0 = p_1$ ، آنگاه

$$\|Tf\|_{q_t} \leq \|Tf\|_{q_0}^{1-t} \|Tf\|_{q_1}^t \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_p$$

بنابر این می‌توانیم فرض کنیم که $p_0 \neq p_1$ ، بالاخص می‌توان فرض کرد که برای هر $0 < t < 1$ ، $p_t < \infty$.

فرض می‌کنیم Σ_X (متناظراً Σ_Y) فضای همه توابع ساده‌ای روی X (متناظراً روی Y) باشد که خارج از مجموعه‌هایی با اندازه متناهی صفر هستند. در این صورت برای هر $p, \Sigma_X \subset L^p(\mu)$ و بنابر گزاره ۶.۷ برای هر $p < \infty$ در $L^p(\mu)$ چگال است؛ حکم مشابهی در مورد Σ_Y برقرار است. بخش اصلی برهان مشتمل بر این است که نشان دهیم برای هر $f \in \Sigma_X$ هر $\|Tf\|_{q_t} \leq M_0^{-t} M_1^t \|f\|_{p_t}$ ، اما بنابر قضیه ۶.۱۴،

$$\|Tf\|_{q_t} = \sup\{|\int (Tf)gdv| : g \in \Sigma_Y, \|g\|_{q_t'} = 1\}.$$

که در آن q_t' نمای مزدوج با q_t است. (توجه کنید که $Tf \in L^{q_0} \cap L^{q_1}$ ، لذا $\{y : Tf(y) \neq 0\}$ باید σ -متناهی باشد مگر اینکه $q_0 = q_1 = \infty$ ؛ بنابر این، مفروضات قضیه ۶.۱۴ برآورد شده‌اند.) به علاوه می‌توانیم فرض کنیم که $f \neq 0$ و f را چنان جایگزین کنیم که $\|f\|_{p_t} = 1$. بنابر این در پی اثبات ادعای زیر هستیم:

• اگر $f \in \Sigma_X$ و $\|f\|_{p_t} = 1$ ، آنگاه برای هر $g \in \Sigma_Y$ که $\|g\|_{q_t'} = 1$

$$|\int (Tf)gdv| \leq M_0^{-t} M_1^t.$$

فرض کنیم $f = \sum_1^m c_j \chi_{E_j}$ و $g = \sum_1^n d_k \chi_{F_k}$ که در آن E_j ها و F_k ها در X و Y واقع شده و مجزا هستند، به علاوه c_j ها و d_k ها نامنفی هستند. c_j ها و d_k را به شکل قطبی می‌نویسیم: $c_j = |c_j| e^{i\theta_j}$ و $d_k = |d_k| e^{i\psi_k}$. همچنین، فرض می‌کنیم:

$$\alpha(z) = (1-z)p_0^{-1} + zp_1^{-1}, \quad \beta(z) = (1-z)q_0^{-1} + zq_1^{-1};$$

بنابر این برای هر $0 < t < 1$ ، $\alpha(t) = p_t^{-1}$ و $\beta(t) = q_t^{-1}$ ، $t \in (0, 1)$ را ثابت می‌گیریم؛ فرض کرده‌ایم که $p_t < \infty$ و نتیجه $\alpha(t) > 0$ ، لذا می‌توانیم چنین تعریف کنیم:

$$f_z = \sum_1^m |c_j| \frac{\alpha(z)}{\alpha(t)} e^{i\theta_j} \chi_{E_j}.$$

چنانچه $\beta(t) < 1$ ، تعریف می‌کنیم:

$$g_z = \sum_1^n |d_k| \frac{1-\beta(z)}{1-\beta(t)} e^{i\psi_k} \chi_{F_k},$$

در حالی که اگر $\beta(t) = 1$ ، برای هر z چنین تعریف می‌کنیم: $g_z = g$. (از حالا به بعد فرض می‌کنیم $\beta(t) < 1$ و جنح و تعدیل $\beta(t) = 1$ را به خواننده واگذار می‌کنیم.) بالاخره، قرار می‌دهیم:

$$\phi(z) = \int (Tf_z)g_z dv.$$

بنابر این،

$$\phi(z) = \sum_{j,k} A_{jk} |c_j| \frac{\alpha(z)}{\alpha(t)} |d_k| \frac{1-\beta(z)}{1-\beta(t)}.$$

که در آن

$$A_{jk} = e^{i(\theta_j + \psi_k)} \int (T\chi_{E_j})\chi_{F_k} d\nu$$

لذا ϕ یک تابع تحلیلی تام از z است که در نوار $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ کراندار است. چون $\int (Tf)g d\nu = \phi(t)$ ، بنابراین سه خط، کافی است نشان دهیم که برای $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ ، $|\phi(z)| \leq M_0$ ، و برای $\operatorname{Re} z = 1$ ، $|\phi(z)| \leq M_1$ ، اما چون برای هر $s \in \mathbb{R}$

$$\alpha(is) = p_0^{-1} + is(p_1^{-1} - p_0^{-1}), \quad 1 - \beta(is) = (1 - q_0^{-1}) - is(q_1^{-1} - q_0^{-1}),$$

داریم

$$|f_{is}| = |f|^{\operatorname{Re} \frac{\alpha(is)}{\alpha(t)}} = |f|^{\frac{p_t}{p_0}}, \quad |g_{is}| = |g|^{\operatorname{Re} \frac{1-\beta(is)}{1-\beta(t)}} = |g|^{\frac{q_t}{q_0}}.$$

بنابر این، طبق نامساوی هولدر،

$$|\phi(is)| \leq \|Tf_{is}\|_{q_0} \|g_{is}\|_{q_0'} \leq M_0 \|f_{is}\|_{p_0} \|g_{is}\|_{q_0'} = M_0 \|f\|_{p_t} \|g\|_{q_t} = M_0.$$

محاسبه‌ای مشابه نشان می‌دهد که $|\phi(1+is)| \leq M_1$ ، لذا ادعا اثبات شده است. اینک نشان خواهیم داد که برای هر $f \in \Sigma_X$ ، $\|Tf\|_{q_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}$ ، لذا با توجه به گزاره ۶.۷، $T|_{\Sigma_X}$ توسعه یکتایی به $L^{p_t}(\mu)$ دارد که برای هر f از $L^{p_t}(\mu)$ در همان نامساوی صدق می‌کند. با مفروض گرفتن چنین f ای، دنباله‌ای مانند $\{f_n\}$ در Σ_X چنان می‌یابیم که $|f_n| \leq |f|$ و $f_n \rightarrow f$ نقطه به نقطه. همچنین، فرض می‌کنیم: $E = \{x : |f(x)| > 1\}$ ، $g_n = f_n \chi_E$ ، $g = f \chi_E$ ، در این صورت هرگاه $p_0 < p_1$ (که با تجدید نامگذاری p ها می‌توان چنین فرض کرد)، داریم $g \in L^{p_0}(\mu)$ و بنابر قضیه همگرایی مغلوب، $\|f_n - f\|_{p_1} \rightarrow 0$ ، $\|g_n - g\|_{p_0} \rightarrow 0$ و $\|h_n - h\|_{p_1} \rightarrow 0$. بنابر این $\|Th_n - Th\|_{q_1} \rightarrow 0$ و $\|Tg_n - Tg\|_{q_0} \rightarrow 0$ ، لذا با گذر به زیردنباله‌ای مناسب می‌توانیم فرض کنیم که $Tg_n \rightarrow Tg$ و $Th_n \rightarrow Th$ (تمرین ۹). اما در این صورت $Tf_n \rightarrow Tf$ ، لذا بنابر لم فاتو،

$$\|Tf\|_{q_t} \leq \liminf \|Tf_n\|_{q_t} \leq \liminf M_0^{1-t} M_1^t \|f_n\|_{p_t} = M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t},$$

و برهان کامل می‌شود. ■

حکم قضیه ریس - تورین را به شکلی نسبتاً قوی‌تر می‌توان بیان کرد. فرض کنیم $M(t)$ نرم عملگر T به عنوان نگاشتی از $L^{p_t}(\mu)$ به $L^{q_t}(\nu)$ باشد. نشان خواهیم داد که $M(t) \leq M_0^{1-t} M_1^t$. ممکن است نامساوی اکید رخ دهد؛ البته، اگر $0 < s < t < u < 1$ و $t = (1-\tau)s - \tau u$ ، آنگاه می‌توان قضیه را مجدداً به کار برده و نشان داد که

$$M(t) \leq M(s)^{1-\tau} M(u)^\tau.$$

در یک کلام، نتیجه این است که $\log M(t)$ تابع محدب از t است.

اینک به قضیه مارکینکوایز می پردازیم که لازمه اش اصطلاحات بیشتری است. فرض می کنیم T نگاشتی از یک فضای برداری مانند \mathcal{D} متشکل از توابعی اندازه پذیر روی (X, \mathcal{M}, μ) به فضای همه توابع اندازه پذیر روی (Y, \mathcal{N}, ν) باشد.

• زیرخطی نامیده می شود هرگاه برای هر $f, g \in \mathcal{D}$ و $c > 0$ ، $|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$ و $|T(cf)| = c|Tf|$

• نگاشتی زیرخطی چون T از نوع قوی (p, q) ($1 \leq p, q \leq \infty$) است هرگاه $L^p(\mu) \subset \mathcal{D}$ ، $L^q(\nu) \subset \mathcal{D}$ و $\|Tf\|_q \leq C \|f\|_p$ ، $f \in L^p(\mu)$ برای هر $C > 0$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $f \in L^p(\mu)$ به توی $L^q(\nu)$ بنگارد، و $C > 0$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $f \in L^p(\mu)$ $\|Tf\|_q \leq C \|f\|_p$

• نگاشتی زیرخطی مانند T از نوع ضعیف (p, q) ($1 \leq q < \infty$ ، $1 \leq p \leq \infty$) نامیده می شود هرگاه $L^p(\mu) \subset \mathcal{D}$ ، $L^q(\nu) \subset \mathcal{D}$ و $\|Tf\|_q \leq C \|f\|_p$ ، $f \in L^p(\mu)$ را به توی $L^q(\nu)$ ضعیف بنگارد و $C > 0$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $f \in L^p(\mu)$ $\|Tf\|_q \leq C \|f\|_p$ ، همچنین، T را از نوع ضعیف (p, ∞) خواهیم خواند اگر و تنها اگر T از نوع قوی (p, ∞) باشد.

۶.۲۸ قضیه درون یابی مارکینکوایز. فرض کنیم (X, \mathcal{M}, μ) و (Y, \mathcal{N}, ν) دو فضای اندازه باشند؛ p_0, p_1, q_0 و q_1 اعضای از $[1, \infty]$ باشند به طوری که $p_0 \leq q_1, p_1 \leq q_0$ و $q_0 \neq q_1$ و

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}, \quad (0 < t < 1).$$

اگر T یک نگاشت زیرخطی از $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ به فضای توابع اندازه پذیر روی Y باشند که از نوع های ضعیف (p_0, q_0) و (p_1, q_1) است، آنگاه T از نوع قوی (p, q) است. به طور دقیق تر، اگر برای $z = 0, 1$ ، $\|Tf\|_{q_z} \leq C \|f\|_{p_z}$ ، آنگاه $\|Tf\|_q \leq B_p \|f\|_p$ که در آن B_p فقط به p و q بستگی دارد، مضافاً C به p بستگی دارد؛ و برای $z = 0, 1$ ، اگر $p_z < \infty$ (متناظراً اگر $p_z = \infty$)، آنگاه وقتی $p \rightarrow p_z$ ، $B_p \rightarrow |p - p_z|$ کراندار باقی می ماند.

برهان. حالت $p_0 = p_1$ آسان است و به خواننده واگذار می شود (تمرین ۴۲). بنابر این بدون کاستن از کلیت می توان فرض کرد $p_0 < p_1$ و فعلاً فرض می کنیم $q_0 < \infty$ و $q_1 < \infty$ نیز برقرار باشند (که از آنجا $p_0 < p_1 < \infty$ نیز برقرار می شود). برای $f \in L^p(\mu)$ فرض می کنیم g_A و h_A همانهایی باشند که در گزاره ۶.۲۵ ذکر شدند. در این صورت بنابر گزاره های ۶.۲۴ و ۶.۲۵،

$$\int |g_A|^{p_0} d\mu = p_0 \int_0^\infty \beta^{p_0-1} \lambda_{g_A}(\beta) d\beta = p_0 \int_0^\infty \beta^{p_0-1} \lambda_f(\beta + A) d\beta$$

$$= p_0 \int_A^\infty (\beta - A)^{p_0-1} \lambda_f(\beta) d\beta \leq p_0 \int_A^\infty \beta^{p_0-1} \lambda_f(\beta) d\beta, \quad (۶.۲۹)$$

$$\int |h_A|^p d\mu = p_1 \int_0^\infty \beta^{p_1-1} \lambda_{h_A}(\beta) d\beta = p_1 \int_0^A \beta^{p_1-1} \lambda_f(\beta) d\beta.$$

به همین منوال،

$$\int |Tf|^q d\nu = q \int_0^\infty \alpha^{q-1} \lambda_{Tf}(\alpha) d\alpha = \tau^q q \int_0^\infty \alpha^{q-1} \lambda_{Tf}(\tau\alpha) d\alpha. \quad (۶.۳۰)$$

چون T زیرخطی است، بنابر قسمت (د) از گزاره ۶.۲۲ داریم:

$$\lambda_{Tf}(\tau\alpha) \leq \lambda_{Tg_A}(\alpha) + \lambda_{Th_A}(\alpha). \quad (۶.۳۱)$$

این نامساوی برای هر $\alpha > 0$ و $A > 0$ درست است، لذا می‌توانیم A را وابسته به α بگیریم، اکنون A ی خاصی انتخاب می‌کنیم، یعنی، از معادله‌هایی که p و q را تعریف می‌کنند معلوم می‌شود که

$$\frac{p_0(q_0 - q)}{q_0(p_0 - p)} = \frac{p^{-1}(q^{-1} - q_0^{-1})}{q^{-1}(p^{-1} - p_0^{-1})} = \frac{p_1(q_1 - q)}{q_1(p_1 - p)}, \quad (۶.۳۲)$$

مقدار مشترک این کمیت‌ها را با σ نشان می‌دهیم و A را مساوی با α^σ می‌گیریم. در این صورت بنابر (۶.۲۹)، (۶.۳۱)، (۶.۳۱) و برآوردهای نوع ضعیف روی T

$$\begin{aligned} \|Tf\|_q^q &\leq \tau^q q \int_0^\infty \alpha^{q-1} [(C_0 \|g_A\|_{p_0} / \alpha)^{q_0} + (C_1 \|h_A\|_{p_1} / \alpha)^{q_1}] d\alpha \\ &\leq \tau^q q C_0^{q_0} p_0^{\frac{q_0}{p_0}} \int_0^\infty \alpha^{q-q_0-1} \left[\int_{\alpha^\sigma}^\infty \beta^{p_0-1} \lambda_f(\beta) d\beta \right]^{\frac{q_0}{p_0}} d\alpha \\ &\quad + \tau^q q C_1^{q_1} p_1^{\frac{q_1}{p_1}} \int_0^\infty \alpha^{q-q_1-1} \left[\int_0^{\alpha^\sigma} \beta^{p_0-1} \lambda_f(\beta) d\beta \right]^{\frac{q_1}{p_1}} d\alpha \\ &= \sum_{j=0}^1 \tau^q q C_j^{p_j} p_j^{\frac{q_j}{p_j}} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi_j(\alpha, \beta) d\beta \right]^{\frac{q_j}{p_j}} d\alpha. \end{aligned} \quad (۶.۳۳)$$

که در آن با نشان دادن توابع مشخصه مجموعه‌های $\{(\alpha, \beta) : \beta < \alpha^\sigma\}$ و $\{(\alpha, \beta) : \beta > \alpha^\sigma\}$ با χ_0 و χ_1

$$\phi_j(\alpha, \beta) = \chi_j(\alpha, \beta) \alpha^{(q-q_j-1)\frac{p_j}{q_j}} \beta^{p_j-1} \lambda_f(\beta).$$

چون $\frac{q_0}{p_1} \geq 1$ و $\frac{q_1}{p_1} \geq 1$ ، می‌توانیم نامساوی مینکوفسکی برای انتگرال‌ها را به کار برده و به دست آوریم:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi_j(\alpha, \beta) d\beta \right]^{q_j/p_j} d\alpha \\ &\leq \left[\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi_j(\alpha, \beta)^{q_j/p_j} d\alpha \right]^{p_j/q_j} d\beta \right]^{q_j/p_j} \end{aligned} \quad (۶.۳۴)$$

فرض می‌کنیم $\tau = \frac{1}{\sigma}$. اگر $q_1 > q_0$ ، آنگاه $q - q_0$ و σ مثبت هستند و نامساوی $\beta > \alpha^\sigma$ با نامساوی $\alpha < \beta^\tau$ معادل

است، لذا

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi_0(\alpha, \beta)^{q_0/p_0} d\alpha \right]^{p_0/q_0} d\beta \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^{\beta^\tau} \alpha^{q_0-1} d\alpha \right]^{p_0/q_0} \beta^{p_0-1} \lambda_f(\beta) d\beta \\ &= (q_0 - q_1)^{-\frac{p_0}{q_0}} \int_0^\infty \beta^{p_0-1+q_0(q_0-1)/q_0} \lambda_f(\beta) d\beta \\ &= (q_0 - q_1)^{-\frac{p_0}{q_0}} \int_0^\infty \beta^{p_0-1} \lambda_f(\beta) d\beta \\ &= |q_0 - q_1|^{-\frac{p_0}{q_0}} p_0^{-1} \|f\|_p^{p_0}, \end{aligned}$$

که در آن برای خلاصه کردن توان β از (۶.۳۲) استفاده کرده‌ایم. از طرف دیگر، اگر $q_1 < q_0$ ، آنگاه $q_0 - q_1$ و σ منفی هستند و نامساوی $\alpha > \beta^\tau$ با $\beta > \alpha^\sigma$ معادل است، لذا همانند فوق،

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi_0(\alpha, \beta)^{q_0/p_0} d\alpha \right]^{p_0/q_0} d\beta &= \int_0^\infty \left[\int_{\beta^\tau}^\infty \alpha^{q_0-1} d\alpha \right]^{p_0/q_0} \beta^{p_0-1} \lambda_f(\beta) d\beta \\ &= (q_0 - q_1)^{-\frac{p_0}{q_0}} \int_0^\infty \beta^{p_0-1} \lambda_f(\beta) d\beta \\ &= |q_0 - q_1|^{-\frac{p_0}{q_0}} p_0^{-1} \|f\|_p^{p_0}, \end{aligned}$$

محاسبه‌ای مشابه نشان می‌دهد که

$$\int_0^\infty \left[\int_0^\infty \phi_1(\alpha, \beta)^{q_1/p_1} d\alpha \right]^{p_1/q_1} d\beta = |q_0 - q_1|^{-p_1/q_1} p_1^{-1} \|f\|_p^{p_1}.$$

با تلفیق این نتایج با (۶.۳۳) و (۶.۳۴) می‌بینیم که

$$\sup \{ \|Tf\|_q : \|f\|_p = 1 \} \leq B_p = 2q^{1/q} \left[\sum_{j=0}^1 C_j^{q_j} (p_j/p)^{q_j/p_j} |q_0 - q_j|^{-1} \right]^{1/q}.$$

اما چون برای $c > 0$ ، $|T(cf)| = c|Tf|$ ، مساوی اخیر ایجاب می‌کند که برای هر $f \in L^p(\mu)$ ، $\|Tf\|_q \leq B_p \|f\|_p$ و

آنچه که تحقق می‌یابد. (بررسی خواص مورد ادعای B_p به صورت یک تمرین آسان به خواننده واگذار می‌شود.)

فقط نشان دادن این مطلب باقی می‌ماند که چه‌طور این استدلال را اصلاح کنیم تا با حالات استثنایی $q_0 = \infty$ یا

$q_1 = \infty$ همخوانی داشته باشد. سه حالت تشخیص می‌دهیم:

حالت I) $p_0 = q_0 = \infty$ (لذا $p_0 \leq q_0 < \infty$)، به‌جای گرفتن $A = \alpha^\sigma$ در تجزیه f ، $A = \alpha/C_1$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $\|Th_A\|_\infty \leq C_1 \|h_A\|_\infty \leq \alpha$ ، لذا $\lambda_{Th_A}(\alpha) = 0$ و با $\phi_1 = 0$ و جایگزینی α/C_1 به‌جای α^σ در تعریف ϕ_0 ، (۶.۳۳) را به‌دست می‌آوریم. در این صورت همان استدلال فوق، نامساوی زیر را

به‌دست می‌دهد:

$$\|Tf\|_q \leq 2 \left[q C_0^{q_0} C_1^{q-q_0} (p_0/p)^{q/p_0} |q-q_0|^{-1} \right]^{1/q} \|f\|_p.$$

حالت II) $p_0 \leq p_1 < \infty$ و $q_0 < q_1 = \infty$. باز هم ایده انتخاب A به گونه‌ای است که $\lambda_{Th_A}(\alpha) = 0$ و انتخاب مناسب A عبارت است از $A = (\alpha/d)^\sigma$ که در آن $d = C_1 [p_1 \|f\|_p^p / p_1]^{1/p_1}$ و $\sigma = p_1 / (p_1 - p)$ (وقتی $q_1 \rightarrow \infty$ مقدار حدی σ ای که به وسیله (۶.۳۲) تعریف می‌شود) در واقع، چون $p_1 > p$ داریم:

$$\begin{aligned} \|Th_A\|_\infty^{p_1} &\leq C_1^{p_1} \|h_A\|_{p_1}^{p_1} = C_1^{p_1} p_1 \int_0^A \alpha^{p_1-1} \lambda_f(\alpha) d\alpha \\ &\leq C_1^{p_1} p_1 A^{p_1-p} \int_0^A \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha) d\alpha = C_1^{p_1} \frac{p_1}{p} \left[\frac{\alpha}{d} \right]^{p_1} \|f\|_p^p = \alpha^{p_1}. \end{aligned}$$

در نتیجه، همانند حالت I، در می‌یابیم که در (۶.۳۳)، $\phi_1 = 0$ و وقتی $\|f\|_p = 1$ انتگرال شامل ϕ_0 به یک B_p

محدود می‌شود، که حکم خواسته شده را به دست می‌دهد.

حالت III) $p_0 < p_1 < \infty$ و $q_1 < q_0 = \infty$. استدلال در همین حالت اساساً همان استدلال حالت II است، به جز اینکه $A = (\alpha/d)^\sigma$ را با انتخاب d به گونه‌ای که $\lambda_{Tq_A}(\alpha) = 0$ در نظر می‌گیریم. ■

ممکن است فرمول‌های طولانی در این برهان ترسناک به نظر برسند، اما ایده‌ها نسبتاً ساده هستند. برای باز کردن آنها تمرین نوشتن برهان برای دو حالت خاص (اما مهم) را پیشنهاد می‌کنیم: (i) $p_0 = q_0 = 1$ ، $p_1 = q_1 = 2$ و (ii) $p_0 = q_0 = 1$ و $p_1 = q_1 = \infty$.

اینک دو قضیه درون‌یابی را با هم مقایسه می‌کنیم. قضیه مارکینکوایز مستلزم برخی محدودیت‌ها روی p و q است که در قضیه ریس - تورین مطرح نیستند؛ اما این محدودیت‌ها در تمام موارد صادق هستند. از اینها که بگذاریم، مفروضات قضیه مارکینکوایز ضعیف‌تر هستند:

T زیرخطی است و لزوماً خطی نیست و فقط لازم است در نقاط انتهایی در تخمین نوع ضعیف صدق کند. حکم در هر دو حالت این است که T از $L^p(\mu)$ به $L^q(\nu)$ کراندار است، اما قضیه ریس - تورین نرم عملگر T را بسیار بهتر تخمین می‌زند. بنابراین این هیچکدام از این قضیه‌ها در برگیرنده دیگری نیستند.

با دو کاربرد از قضیه مارکینکوایز این بخش را به پایان می‌رسانیم. اولی به عملگر ماکسیمال هاردی - لیتلود H که در بند ۳.۴ ذکر شد مربوط می‌شود:

$$Hf(x) = \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{\sqrt{t}} dy \quad (f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)).$$

به وضوح H زیرخطی است و برای هر $f \in L^\infty$ در نامساوی $\|Hf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ صدق می‌کند. به علاوه، قضیه ۳.۱۷ دقیقاً چنین بیان می‌دارد که H از نوع ضعیف $(1,1)$ است. نتیجه می‌گیریم که:

۳۵. ۶ نتیجه. ثابتی مانند $C > 0$ وجود دارد به طوری که اگر $1 < p < \infty$ و $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ، آنگاه

$$\|Hf\|_p \leq C \frac{p}{p-1} \|f\|_p.$$

کاربرد دوم قضیه‌ای است در مورد عملگرهای انتگرال مرتبط به قضیه ۱۸. ۶.

۳۶. ۶ قضیه. فرض کنیم (X, \mathcal{M}, μ) و (Y, \mathcal{N}, ν) دو فضای اندازه σ -متناهی باشند و $1 < q < \infty$. به علاوه، فرض کنیم K تابع اندازه‌پذیری روی $X \times Y$ باشد به طوری که به ازای ثابتی چون $C > 0$ و برای تقریباً هر x از X داشته باشیم $[K(x, \cdot)]_q \leq C$ و برای تقریباً هر y از Y ، اگر $1 \leq p < \infty$ و $f \in L^p(\nu)$ ، آنگاه انتگرال

$$Tf(x) = \int K(x, y) f(y) d\nu(y)$$

برای تقریباً هر x از X مطلقاً همگرا است و عملگر T که بدین ترتیب تعریف می‌شود از نوع ضعیف (p, q) است و برای هر p و r با شرط $1 < p < r < \infty$ و $1 + q^{-1} = r^{-1} + p^{-1}$ از نوع قوی $(p, 1)$ است. به طور دقیق‌تر، ثابتی مستقل از K مانند B_p وجود دارد به طوری که

$$\|Tf\|_q \leq B_p C \|f\|_1, \quad \|Tf\|_r \leq B_p C \|f\|_p \quad (p > 1, r^{-1} = p^{-1} + q^{-1} - 1 > 0).$$

برهان. فرض می‌کنیم p' و q' نمای مزدوج با p و q باشند؛ در این صورت

$$r^{-1} = p^{-1} + q^{-1} - 1 = p^{-1} - (q')^{-1} = q^{-1} - (p')^{-1},$$

لذا $p < q'$ و $q < p'$. فرض می‌کنیم $f \in L^p$ و $1 \leq p < q'$ ؛ با ضرب f و K در ثابت‌ها، می‌توان فرض کرد که

$$\|f\|_p = C = 1 \text{ برای عدد مثبت مفروضی چون } A \text{ که از این به بعد ثابت خواهد بود تعریف می‌کنیم:}$$

$$E = \{(x, y) : |K(x, y)| > A\}, \quad K_1 = (\text{sgn } K)(|K| - A)\chi_E, \quad K_2 = K - K_1,$$

و فرض می‌کنیم T_1 و T_2 عملگرهای متناظر با K_1 و K_2 باشند. در این صورت بنا بر گزاره‌های ۶.۲۴ و ۶.۲۵، چون $q > 1$ داریم:

$$\int |K_1(x, y)| d\nu(y) = \int_0^\infty \lambda_{K(x, \cdot)}(\alpha + A) d\alpha \leq \int_A^\infty \alpha^{-q} d\alpha = \frac{A^{1-q}}{q-1},$$

و به طور مشابه

$$\int |K_1(x, y)| d\mu(x) \leq \frac{A^{1-q}}{q-1}$$

بنابر این، طبق قضیه ۱۸. ۶، انتگرال تعریف کننده $T_1 f(x)$ برای تقریباً همه x ها همگرا است و

$$\|T_1 f\|_p \leq \frac{A^{1-q}}{q-1} \|f\|_p = \frac{A^{1-q}}{q-1}. \quad (۶.۳۷)$$

مشابهاً، چون $q < p'$

$$\int |K_T(x, y)|^{p'} d\nu(y) = p' \int_0^A \alpha^{p'-1} \lambda_{K(x, \cdot)}(\alpha) d\alpha \leq p' \int_0^A \alpha^{p'-1-q} d\alpha = \frac{p' A^{p'-q}}{p'-q}.$$

بنابر این، طبق نامساوی هولدر، انتگرال تعریف کننده $T_\tau f(x)$ برای هر x همگرا است و

$$\|T_\tau f\|_\infty \leq \left[\frac{p' A^{p'-q}}{p'-q} \right]^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p = \left[\frac{r}{q} \right]^{\frac{1}{p'}} A^{\frac{q}{r}}. \quad (۶.۳۸)$$

از این رو ثابت کرده ایم که $Tf = T_1 f + T_\tau f$ تقریباً همه جا خوش تعریف است.

اینک با مفروض گرفتن $\alpha > 0$ ، می خواهیم $\lambda_{Tf}(\alpha)$ را تخمین بزنیم، اما بنابر قسمت (د) از گزاره ۳۸. ۶، اگر A را به صورت

$A = \left[\frac{\alpha}{r} \right]^{\frac{r}{q}} \left[\frac{q}{r} \right]^{\frac{r}{qp'}}$ انتخاب کنیم، آنگاه خواهیم داشت $\lambda_{T_\tau f}(\frac{1}{q} \alpha) = 0$ ، لذا $\lambda_{Tf}(\frac{1}{q} \alpha) = 0$ ، با این انتخاب A ، به کمک (۶.۳۷) و نامساوی چیشف به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \lambda_{Tf}(\alpha) &\leq \lambda_{T_1 f}(\frac{1}{q} \alpha) \leq \left[\frac{\|T_1 f\|_p}{\alpha} \right]^p \leq \left[\frac{r A^{1-q}}{(q-1)\alpha} \right]^p \\ &= \frac{r^{p-(1-q)pr/q}}{(q-1)^p} \left[\frac{q}{r} \right]^{(1-q)pr/qp'} \alpha^{-p+(1-q)pr/q} = C_p \left[\frac{\|f\|_p}{\alpha} \right]^r, \end{aligned}$$

زیرا $\|f\|_p = 1$ و

$$\frac{(1-q)pr}{q} - p = p \left(\frac{-r}{q} - 1 \right) = -p \cdot \frac{r}{q} = -r.$$

اکنون استدلال مشابه ساده‌ای تخمین $\lambda_{Tf}(\alpha) \leq C_p (\|f\|_p / \alpha)^r$ را بدون هیچ محدودیتی روی $\|f\|_p$ به دست می دهد،

بنابر این نشان داده ایم که T از نوع ضعیف (p, r) است و به ویژه (برای $p=1$) از نوع ضعیف $(1, q)$ است.

بالاخره، با فرض $\tilde{p} \in (p, q')$ ، $p \in (1, q')$ ، \tilde{p} را انتخاب کرده و \tilde{r} را با تساوی $\tilde{p}^{-1} = \tilde{p}^{-1} - (q')^{-1}$ تعریف می کنیم. در این

صورت T از نوع‌های ضعیف $(1, q)$ و (\tilde{p}, \tilde{r}) است، لذا از قضیه مارکینکوایز معلوم می شود که T از نوع قوی (p, r) است.

تمرین‌ها

(۴) فرض کنیم $1 < p \leq \infty$ و $1 + q^{-1} = p^{-1}$. اگر T عملگر کراندار روی L^p باشد به طوری که برای هر f و g از

$$\int (Tf)g = \int f(Tg), \quad L^p \cap L^q$$

به طور یکتا به یک عملگر کراندار روی L^r توسعه می یابد.

(۴۲) قضیه مارکینکوایز را در حالت $p_0 = p_1$ ثابت کنید. (با قرار دادن $p_0 = p_1 = p$ داریم:

$$\lambda_{Tf}(\alpha) \leq \left(\frac{C_0 \|f\|_p}{\alpha} \right)^{q_0}, \quad \lambda_{Tf}(\alpha) \leq \left(\frac{C_1 \|f\|_p}{\alpha} \right)^{q_1}.$$

بسته به α ، از هر کدام از تخمین‌ها که بهتر است استفاده کرده و $\int_0^\infty \alpha^{q-1} \lambda_{Tf}(\alpha) d\alpha$ را محدود سازید.

(۴۳) فرض کنیم H عملگر ماکسیمال هاردی-لیتوود روی \mathbb{R} باشد. $H\chi_{(0,1)}$ را به‌طور صریح حساب کنید ثابت کنید که این تابع برای $p > 1$ در L^p است و در L^1 ضعیف است اما در L^1 نیست و وقتی $p \rightarrow 1$ نرم L^p ی آن همانند $(p-1)^{-1}$ به ∞ میل می‌کند، گرچه برای هر p ، $\|\chi_{(0,1)}\|_p = 1$.

(۴۴) فرض کنیم I_α عملگر انتگرال‌گیری کسری تمرین ۶۱ از بند ۲.۶ باشد. اگر $0 < \alpha < 1$ و $1 < p < \alpha^{-1}$ و $r^{-1} = p^{-1} - \alpha$ ، آنگاه نسبت به اندازه لبگ روی $(0, \infty)$ ، I_α از نوع ضعیف $(1, (1-\alpha)^{-1})$ و از نوع قوی (p, r) است.

(۴۵) اگر $0 < \alpha < n$ ، عملگری مانند T_α بر مجموعه توابع روی \mathbb{R}^n به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T_\alpha f(x) = \int |x-y|^{-\alpha} f(y) dy.$$

در این صورت نسبت به اندازه لبگ روی \mathbb{R}^n ، T_α از نوع ضعیف $(1, (n-\alpha)^{-1})$ و از نوع قوی (p, r) است که در آن $1 < p < n\alpha^{-1}$ و $r^{-1} = p^{-1} - \alpha n^{-1}$. (حالت $n=3$ و $\alpha=1$ در فیزیک از اهمیت خاصی برخوردار است؛ اگر f بیان‌کننده چگالی یک جرم یا توزیع بار باشد، آنگاه $T_1 f$ - بیان‌کننده گرانش القایی یا پتانسیل الکترواستاتیکی است.)

یادداشت‌ها و مراجع

اهمیت فضای $L^1([a, b])$ بلافاصله پس از ابداع انتگرال لبگ به‌خاطر ارتباط آن با سری‌های فوریه و بسط‌های متعامد دیگر خیلی سریع مشخص شد؛ یکی از نخستین دست‌آوردهای نظریه لبگ، ایزومورف بودن $L^1([a, b])$ با l^1 ، یا هم‌ارز آن، یعنی کامل بودن $L^p([a, b])$ بود که در سال ۱۹۰۷ توسط فیشر [۴۴] و اف. ریس [۱۱۴] کشف شد. فضاهای $L^1([a, b])$ برای $1 < p < \infty$ توسط اف. ریس [۱۱۷] مورد کنکاش واقع شده بود، ولی همان‌طور که فشرده‌گی زیردنباله‌ای ضعیف گوی بسته

واحد در L^p را اثبات کرد، همه احکام اصلی واقع در بندهای ۶.۱ و ۶.۲ را نیز اثبات کرد. تساوی $(L^1)^* = L^\infty$ اولین بار توسط اشتنهاوس اثبات شد [۱۴۳].

اینکه فضاهای L^p فضاهای L^q نامیده نشده‌اند از جهاتی ناگوار است، زیرا - همان‌طور که در رابطه مزدوجی $p^{-1} + q^{-1} = 1$ و احکام بند ۶.۵ دیده شد - روابط بین فضاهای L^p مختلف معمولاً شامل معادلات خطی بر حسب p^{-1} هستند. بحث از منظر عمیق‌تر فضاهای L^p و کاربردهایشان در خیطه‌های دیگر آنالیز را می‌توان در لایب لوز [۹۳] یافت.

بند ۶.۱: عموماً نامساوی هولدر در حالت $p = 2$ با نام‌های کوشی (کسی که آن را برای مجموع‌های متناهی ثابت کرد) و بورباکی و شوارتز (کسانی که مستقلاً آن را برای انتگرال‌ها ثابت کردند) در ارتباط است. برای p های کلی، این نامساوی مستقلاً توسط هولدر و راجر کشف شد. نامساوی اصلی مینکوفسکی برای مجموع‌های متناهی بود. (هاردی، لیتلوود و پولیا [۶۶] را ببینید) اثبات فشنگی از نامساوی هولدر به کمک نظریه تابع مختلط را می‌توان در روبل [۱۲۲] یافت.

روابط بین فضاهای $L^p + L^q$ که در تمرین ۴ تعریف شد در [آوارز ۵] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. برای موضوعی از تمرین ۵ که دربرگیرنده برخی شرایط دیگر که تحت آنها شمول $L^p \subset L^q$ برقرار می‌شود رومرو [۱۲۰] را ببینید. برای بحث راجع به رابطه کلی‌تر $L^p(\mu) \subset L^q(\nu)$ می‌توانید به میامی [۱۰۰] رجوع کنید.

بند ۶.۲: زهیافت متفاوت خوبی برای نظریه دوگان L^p به ازای $1 < p < \infty$ می‌توان در هویت و استرامبرگ [بند ۱۵ از ۷۶] یافت، جی. شوارتز در [۱۳۰] یک رده‌بندی از $(L^1)^*$ یافته است که روی فضاهای اندازه دل‌خواه نیز معتبر است.

برهان. قضیه ۶.۱۵ برای $p = \infty$ بی‌نتیجه است زیرا تابع مجموعه $\nu(E) = \phi(\chi_E)$ لزوماً جمعی شمارش‌پذیر نیست. البته ν یک اندازه مختلط متناهیاً جمعی کراندار روی (X, M) است که نسبت به μ مطلقاً پیوسته است بدانمعناست که اگر $\mu(E) = 0$ ، آنگاه $\nu(E) = 0$. برعکس، اگر یک اندازه مختلط متناهیاً جمعی کراندار مانند ν روی (X, M) مفروض باشد، می‌توان انتگرال یک تابع اندازه‌پذیر کراندار نسبت به ν روی (X, M) تعریف کرد. (وقتی f ساده است به روشنی $\int f d\nu$ را تعریف کرده و سپس نشان داده می‌شود که $\left| \int f d\nu \right| \leq C \|f\|_\infty$)، لذا انتگرال به همه حدود یکنواخت توابع ساده توسعه داده می‌شود.)

در این روش نمایشی از $(L^\infty)^*$ به صورت فضایی از اندازه‌های مختلط متناهیاً جمعی به دست می‌آید. هویت و استرامبر [بند ۲۰ از ۷۶] را دیده و برای شرح کلی‌تری از انتگرال‌های متناهیاً جمعی، دانفورد و شوارتز [فصل ۳ از ۳۵] را ببینید. (مثالی از یک $\phi \in (L^\infty)^* \setminus L^1$ که در انتهای بند ۶.۲ ذکر کردیم نشان می‌دهد که اندازه‌های متناهیاً جمعی ناگوار چگونه می‌توانند باشند: اگر $\nu(E) = \phi(\chi_E)$ ، آنگاه $\nu \ll m$ ، اما وقتی در کنار تابعی پیوسته انتگرال‌گیری شد، ν مانند جرم نقطه‌ای در صفر رفتار می‌کند.)

بند ۶.۳: قضیه ۱۸. ۶ احکام شور [۱۲۹] (برای حالت $p=2$) و دلیلو. اچ. یانگ [۱۶۴] (برای حالت $K(x, y) = k(x-y)$; بند ۸.۲ را ببینید) را تعمیم می‌دهد. قضیه ۶.۲۰ نیز اساساً به شور [۱۲۹] منسوب است. خواننده‌ای که مشتاق نامساوی‌ها است و با این بخش مجاب نمی‌شود دنیایی از این نامساوی‌ها را می‌تواند در هاردی، لیتل‌وود و پولیا [۶۶] بیابد.

بند ۶.۴: فضاها L^p ی ضعیف نخستین بار به‌طور ضمنی در برآوردهای نوع ضعیف ظاهر شدند و مثال‌هایی از آن به سال ۱۹۲۰ برمی‌گردد؛ تذکرات زیرین بند ۶.۵ را هم ببینید. تجدید آرایش نزولی (تمرین ۴۰) توسط هاردی و لیتل‌وود در [۶۵] معرفی شدند، این دو انگیزش خوشایندی از قضیه اصلی خود روی تجدید آرایش‌ها برحسب میانگین‌های کریکت دادند.

بند ۶.۵: قضیه ریس-تورین نخستین بار توسط ام. ریس (برادر کوچکتر اف. ریس) تحت مفروضات $p_1 \leq q_1$ و $p_2 \leq q_2$ اثبات شد [۱۱۸]؛ برهان حالت کلی و فکر استفاده از لم سه خط به تورین [۱۴۹] نسبت داده شده است. ای. ام. اشتاین حالت عمومی خیلی قوی‌تر قضیه ریس - تورین را ثابت کرده است.

این قضیه درباره خانواده‌ای چون $\{T_z : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ از عملگرهایی است که (به‌طور کلی) از نظر تحلیلی به z وابسته‌اند و در برخی شرایط نمو معتدل مثل $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$ صدق می‌کند که اگر برای $\operatorname{Re} z = j$ ($j=0,1$) از L^{p_j} به L^{q_j} کراندار باشد، آنگاه برای $\operatorname{Re} z = t$ ($0 < t < 1$) T_x از L^{p_t} به L^{q_t} کراندار است که در آن p_t و q_t مثل قضیه ریس - تورین تعریف می‌شوند. حکم دقیق و برهان در بنت و شارپلی [بند ۴.۳ از ۱۵]، اشتاین و وایس [بند ۷.۴ از ۱۴۲] یا زیگموند [XII. I از ۱۶۸] می‌توان یافت. برای بسط بیشتر این ایده‌ها کویفمن [۲۸] را ببینید.

قضیه درون‌یابی مارکینکوویز برای حالت $p = q$ ($j=0,1$) توسط خود مارکینکوویز در [۹۷] رسماً اعلام شده بود؛ پس از مرگ ناپهنگام وی در جنگ جهانی دوم، کار او توسط زیگمن تکمیل شد [۱۶۶]. قضیه مذکور حتی تحت شرایط ضعیف‌تری روی T نیز قابل اثبات بود؛ پیچ و تاب زیادی که به استدلال داده‌ایم همان حکمی را به‌دست می‌دهد که تحت تک‌فرض $|T(f+g)| \leq C(|Tf| + |Tg|)$ برای یک ثابت C به‌دست می‌آید. زیگمن [۱۶۶] و [XII. ۴، ۱۶۸] را ببینید. فضاها

L^p و L^p ی ضعیف بخشی از خانواده دو پارامتری مانند $\{L(p, q) : 1 \leq p, q \leq \infty\}$ از فضاها ی توابع موسوم به فضاها ی لورنژ به‌طوری که $E^p = L(p, \infty)$ و $L^p(p, \infty)$ ضعیف است را تشکیل می‌دهند، و قضیه مارکینکوویز را به حکمی درباره درون‌یابی عملگرهای روی فضاها ی $L(p, q)$ می‌توان توسعه داد. بنت و شارپلی [۱۵، ۴.۴] یا اشتاین و وایس [۱۴۲، ۵.۳] را ببینید.

مثال‌هایی دیگری از «خانواده‌هایی پیوسته» از فضاها ی باناخ وجود دارند که قضیه درون‌یابی را می‌توان برای آنها اثبات کرد - برای مثال فضاها ی A_α که در تمرین ۱۱ از بند ۵.۱ ذکر شدند. فضاها ی سوبولف که در بند ۹.۳ معرفی شدند. دو شگرد کلی نیز برای

ساختن « فضاهای میانی » بین زوج‌هایی از فضاهای باناخ وجود دارد، و تحت عنوان « روش مختلط » و « روش حقیقی » مشهورند، که می‌توان اینها را به‌عنوان صورت‌های مجرد قضایای ریس - تورین و مارکینکوویز در نظر گرفت. شرح و نقل این نظریه‌ها و کاربردهایشان را می‌توان در برگ و لوف استروم [۱۶] یافت، بنت و شارپلی [۱۵] را هم ببینید که روش حقیقی و کاربردهایش را بیان داشته است. نتیجه ۶.۳۵ به هاردی و لیتلوود منسوب شده است [۶۵]. قضیه ۶.۳۶ نخستین بار در فولند و اشتاین ظاهر شد [۵۱]، اما ایده اصلی برهان چندین سال قبل توسط اشتاین کشف شده بود (اشتاین [۱۴۰، ۵.۱] را ببینید)، و حالت خاص ذکر شده در تمرین ۴۴ به هاردی و لیتلوود برمی‌گردد [۶۴].

کتابنامه

1. R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York (1975).
2. W. J. Adams, The Life and Times of the Central Limit Theorem, Kaedmon, New York (1974).
3. Weak convergence of linear functionals, Bull. Amer Math. Soc. 44(1938), 196.
4. Weak topologies of normed linear spaces, Annals of Math. 41 (1940), 252-267.
5. S. A. Alvarez, Parithmetic, Amer Math. Monthly 99 (1992), 656-662.
6. C. Arzelà, Sulle funzioni di linee, Mem. Accad. Sci. 1st. Bologna Cl. Sci. Fis. Mat. (5) 5 (1895), 55-74.
7. J. M. Ash (ed.), Studies in Harmonic Analysis, Mathematical Association of America, Washington, D.C. (1976).
8. S. Banach, Sur le problème de la mesure, Fund. Math. 4 (1923), 7-33; also in Banach's Oeuvres, Vol. I, Polish Scientific Publishers, Warsaw (1967), 66-89.
9. S. Banach, Théorie des Operations Linéaires, Monografie Matematyczne, Warsaw, 1932; also in Banach's Oeuvres, Vol.11, Polish Scientific Publishers, Warsaw(1967), 13-302.
10. S. Banach and H. Steinhaus, Sur le principe de La condensation de singularités, Fund. Math. 9(1927), 50-61; also in Banach's Oeuvres, Vol. II, Polish Scientific Publishers, Warsaw (1967), 365-374.
11. S. Banach and A. Tarski, Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes, Fund. Math. 6 (1924), 244-277; also in Banach's Oeuvres, Vol. I, Polish Scientific Publishers, Warsaw (1967), 118-148.
12. R. O. Bartle, An extension of Egorov's theorem, Amer Math. Monthly 87(1980),628-633.
13. R. G. Bartle, Return to the Riemann integral, Amer Math. Monthly 103 (1996),625-632.
14. W. Beckner, Inequalities in Fourier analysis, Annals of Math. 102 (1975), 159-182.
15. C. Bennett and R. Sharpley, Interpolation of Operators, Academic Press, Boston (1988).
16. J. Bergh and J. Löfstrom, Interpolation Spaces, Springer-Verlag, Berlin (1976).
17. P. Billingsley, Probability and Measure (2nd ed.), Wiley, New York (1986).
18. C. B. Blyth and P. K. Pathak, A note on easy proofs of Stirling's theorem, Amer Math. Monthly 93 (1986), 376-379.
19. N. Bourbaki, Sur les espaces de Banach, C. R. Acad. Sci. Paris 206 (1938),1701-1704.
20. N. Bourbaki, General Topology (2 vols.), Hermann, Paris, and Addison-Wesley, Reading, Mass. (1966).
21. A. Brown, An elementary example of a continuous singular function, Amer Math. Monthly 76 (1969), 295-297.
22. C. Carathéodory, Vorlesungen über Reelle Funktionen, Teubner, Leipzig (1918);2nd ed. (1927), reprinted by Chelsea, New York (1948).
23. E. tech, On bicomact spaces, Annals of Math. 38 (1937), 823-844.
24. P. R. Chernoff, A simple proof of Tychonoff's theorem via nets, Amer Math. Monthly 99 (1992), 932-934.
25. K. L. Chung, A Course in Probability Theory (2nd ed.), Academic Press, New York (1974).
26. P. J. Cohen; Set Theory and the Continuum Hypothesis, Benjamin, New York (1966).
27. D. L. Cohn, Measure Theory, Birkhäuser, Boston (1980).
28. R. Coifman, M. Cwikel, R. Rochberg, Y. Sagher, and O. Weiss, Complex inter polation for families of

- Banach spaces, Harmonic Analysis in Euclidean Spaces (Proc. Symp. Pure Math., Vol. 35), part 2, American Mathematical Society, Providence, R.I. (1979), 269-282.
29. P. J. Daniell, A general form of integral, *Annals of Math.* 19 (1918), 279-294.
30. K. M. Davis and Y. C. Chang, *Lectures on Bochner-Riesz Means*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (1987).
31. K. deLeeuw, The Fubini theorem and convolution formula for regular measures, *Math. Scand.* 11 (1962), 117-122.
32. J. DePree and C. Swartz, *Introduction to Real Analysis*, Wiley, New York (1988).
33. J. Dieudonné, *History of Functional Analysis*, North-Holland, Amsterdam (1981).
34. J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston (1966); reprinted by Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa (1989).
35. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators* (3 vols.), Wiley-Interscience, New York (1958, 1963, and 1971).
36. H. Dym and H. P. McKean, *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, New York (1972).
37. G. A. Edgar, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer-Verlag, New York (1990).
38. R. Engelking, *General Topology* (rev. ed.), Heldermann Verlag, Berlin (1989).
39. K. J. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (1985).
40. K. J. Falconer, *Fractal Geometry*, Wiley, New York (1990).
41. H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, Berlin (1969).
42. C. Fefferman, Pointwise convergence of Fourier series, *Annals of Math.* 98 (1973), 551-571.
43. M. B. Feldman, A proof of Lusin's theorem, *Amer Math. Monthly* 88 (1981), 191-192.
44. E. Fischer, Sur la convergence en moyenne, *C. R. Acad. Sci. Paris* 144 (1907), 1022-1024.
45. G. B. Folland, Remainder estimates in Taylor's theorem, *Amer Math. Monthly* 97 (1990), 233-235.
46. G. B. Folland, *Fourier Analysis and Its Applications*, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, Cal. (1992).
47. G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, Boca Raton, Fla. (1995).
48. G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations* (2nd ed.), Princeton University Press, Princeton, N.J. (1995).
49. G. B. Folland, Fundamental solutions for the wave operator, *Expos. Math.* 15 (1997), 25-52.
50. G. B. Folland and A. Sitaram, The uncertainty principle: a mathematical survey, *J. Fourier Anal. Appl.* 3 (1997), 207-238.
51. G. B. Folland and E. M. Stein, Estimates for the $\bar{\partial}$, complex analysis on the Heisenberg group, *Commun. Pure Appl. Math.* 27 (1974), 429-522.
52. M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rend. Circ. Mat. Palermo* 22 (1906), 1-74.
53. M. Fréchet, Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait, *Bull. Soc. Math. France* 43 (1915), 248-265.
54. M. Fréchet, Des familles et fonctions additives d'ensembles abstraits, *Fund. Math.* 5 (1924), 206-251.
55. I. M. Gelfand and G. E. Shilov, *Generalized Functions*, Academic Press, New York (1964).
56. K. Godel, What is Cantor's continuum problem?, *Amer Math. Monthly* 54 (1947), 515-525; revised and expanded version in P. Benacerraf and H. Putnam (eds.),

- Philosophy of Mathematics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1964), 258-273.
57. R. A. Gordon, The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock, American Mathematical Society, Providence, R.I. (1994).
 58. S. Grabiner, The Tietze extension theorem and the open mapping theorem, Amer. Math. Monthly 93 (1986), 190-191.
 59. A. Haar, Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Annals of Math. 34 (1933), 147-169; also in Haar's Gesammelte Arbeiten, Akadémiai Kiadó, Budapest (1959), 600-622.
 60. H. Hahn, Über die Multiplikation total-additiver Mengenfunktionen, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa 2 (1933), 429-452.
 61. H. Hahn and A. Rosenthal, Set Functions, University of New Mexico Press, Albuquerque, N.M. (1948).
 62. P. R. Halmos, Measure Theory, Van Nostrand, Princeton, N.J. (1950); reprinted by Springer-Verlag, New York (1974).
 63. P. R. Halmos, Naive Set Theory, Van Nostrand, Princeton, N.J. (1960); reprinted by Springer-Verlag, New York (1974).
 64. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals I, Math. Zeit. 27 (1928), 565-606; also in Hardy's Collected Papers, Vol. III, Oxford University Press, Oxford (1969), 564-607.
 65. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, A maximal theorem with function-theoretic applications, Acta Math. 54 (1930), 81-116; also in Hardy's Collected Papers, Vol. II, Oxford University Press, Oxford (1967), 509-544.
 66. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and O. Pólya, Inequalities (2nd ed.), Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (1952).
 67. D. G. Hartig, The Riesz representation theorem revisited, Amer. Math. Monthly 90 (1983), 277-280.
 68. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Verlag von Veit, Leipzig (1914); reprinted by Chelsea, New York (1949).
 69. F. Hausdorff, Dimension und äusseres Mass, Math. Annalen 79 (1919), 157-179.
 70. T. Hawkins, Lebesgue's Theory of Integration, University of Wisconsin Press, Madison, Wis. (1970).
 71. J. Hennefeld, A nontopological proof of the uniform boundedness theorem, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 217.
 72. R. Henstock, The General Theory of Integration, Oxford University Press, Oxford, U.K. (1991).
 73. E. Hewitt, On two problems of Urysohn, Annals of Math 47 (1946), 503-509.
 74. E. Hewitt and R. E. Hewitt, The Gibbs-Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier analysis, Arch. Hist. Exact Sci. 21 (1979), 129-160.
 75. E. Hewitt and K. A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin (1963).
 76. E. Hewitt and K. Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-Verlag, Berlin (1965).
 77. L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin (1983).
 78. J. E. Hutchinson, Fractals and self-similarity, Indiana U. Math. J. 30 (1981), 713-747.
 79. G. W. Johnson, An unsymmetric Fubini theorem, Amer. Math. Monthly 91 (1984), 131-133.
 80. S. Kakutani, Concrete representation of abstract (M)-spaces, Annals of Math. 42 (1941), 994-1024.

81. S. Kakutani and I. C. Oxtoby, Construction of a non-separable invariant extension of the Lebesgue measure space, *Annals of Math.* 52 (1950), 580-590.
82. J. L. Kelley, The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice, *Fund. Math.* 37 (1950), 75-76.
83. J. L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, N.J. (1955); reprinted by Springer-Verlag, New York (1975).
84. F. B. Knight, *Essentials of Brownian Motion and Diffusion*, American Mathematical Society, Providence, R.I. (1981).
85. A. N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer-Verlag, Berlin (1933); translated as *Found of the Theory of Probability*, Chelsea, New York (1950).
86. H. König, *Measure and Integration*, Springer-Verlag, Berlin (1997).
87. T. W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (1988).
88. J. Kupka and K. Prikry, The measurability of uncountable unions, *Amer Math. Monthly* 91 (1984), 85-97.
89. A. V. Lair, A Rellich compactness theorem for sets of finite volume, *Amer Math. Monthly* 83 (1976), 350-351.
90. J. Lamperti, *Probability* (2nd ed.), Wiley, New York (1996).
91. H. Lebesgue, Intégrale, longueur, aire, *Annali Mat. Pura Appl.* (3) 7 (1902), 231-359; also in *Lebesgue's Oeuvres Scientifiques*, Vol. I, L'Enseignement Mathématique, Geneva (1972), 201-331.
92. H. Lebesgue, Sur l'intégration des fonctions discontinues, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 27 (1910), 361-450; also in *Lebesgue's Oeuvres Scient* vol. II, L'Enseignement Mathématique, Geneva (1972), 185-274.
93. E. H. Lieb and M. Loss, *Analysis*, American Mathematical Society, Providence, R.I. (1997).
94. L. H. Loomis, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, Van Nostrand, Princeton, N.J. (1953).
95. L. H. Loomis and S. Sternberg, *Advanced Calculus*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1968); reprinted by Jones and Bartlett, Boston (1990).
96. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco (1983).
97. J. Marcinkiewicz, Sur l'interpolation d'opérateurs, *C. R. Acad. Sci. Paris* 208 (1939), 1272-1273.
98. A. Markov, On mean values and exterior densities [*Mat. Sbornik* 4(46) (1938), 165-191.
99. R. M. McLeod, *The Generalized Riemann Integral*, Mathematical Association of America, Washington, D.C. (1980).
100. A. G. Miamee, The inclusion $LP(j) \subset L$, *Amer Math. Monthly* 98 (1991), 342-345.
101. E. H. Moore and H. L. Smith, a general theory of limits, *Amer J. Math.* 44 (1922), 102-121.
102. J. Nagata, *Modern General Topology* (2nd rev. ed.), North-Holland, Amsterdam (1985).
103. E. Nelson, Regular probability measures on function spaces, *Annals of Math.* 69 (1959), 630-643.
104. E. Nelson, Feynman integrals and the Schrodinger equation, *J. Math. Phys.* 5 (1964), 332-343.
105. E. Nelson, *Dynamical Theories of Brownian Motion*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1967).
106. D. J. Newman, Fourier uniqueness via complex variables, *Amer Math. Monthly* 81 (1974), 379-380.
107. O. Nikodym, Sur une généralisation des intégrales de M. J. Radon, *Fund. Math.* 15 (1930), 131-179.
108. W. F. Pfeffer, *Integrals and Measures*, Marcel Dekker, New York (1977).
109. W. F. Pfeffer, *The Riemann Approach to Integration*, Cambridge University Press, London (1993).
110. M. Plancherel, Contribution a l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies, *Rend. Circ. Mat. Paler*, no 30 (1910), 289-335.
111. J. Radon, Theorie und Anwendungen der absolut additiv Mengenfunktionen, *S.-B. Math.-Natur Kl. Kais. Akad. Wiss. Wien* 122.IIa (1913), 1295-1438; also in *Radon's Collected Works*, vol. I, Birkhäuser, Basel (1987), 45-188.

112. M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis* (2nd ed.), Academic Press, New York (1980).
113. B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, in *Riemann's Gesammelte Mathematische Werke*, Teubner, Leipzig (1876), 254-269.
114. F. Riesz, *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions*, *C. R. Acad. Sci. Paris* 144 (1907), 615-619; also in *Riesz's Oeuvres Completes*, Vol. I, Akadémiai Kiadó, Budapest (1960), 378-381.
115. F. Riesz, *Sur une espede de geometrie analytique des systèmes de fonctions sommables*, *C. R. Acad. Sci. Paris* 144 (1907), 1409-1411; also in *Riesz's Oeuvres Completes*, Vol. I, Akadémiai Kiadó, Budapest (1960), 386-388.
116. F. Riesz, *Sur les operations fonctionnelles linéaires*, *C. R. Acad. Sci. Paris* 149 (1909), 974-977; also in *Riesz's Oeuvres Completes*, Vol. I, Akadémiai Kiadó, Budapest (1960), 400-402.
117. F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, *Math. Annalen* 69 (1910), 449-497; also in *Riesz's Oeuvres Completes*, Vol. I, Akadémiai Kiadó, Budapest (1960), 441-489.
118. M. Riesz, *Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires*, *Acta Math.* 49 (1926) 465-497; also in *Riesz's Collected Papers*, Springer-Verlag, Berlin (1988), 377-409.
119. C. A. Rogers, *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (1970).
120. J. L. Romero, *When is L^p contained in L^q* , *Amer. Math. Monthly* 90 (1983), 203-206.
121. H. L. Royden, *Real Analysis* (3rd ed.), Macmillan, New York (1988).
122. L. A. Rubel, *A complex-variables proof of Holder's inequality*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 15 (1964), 999.
123. W. Rudin, *Lebesgue's first theorem*, in L. Nachbin (ed.), *Mathematical Analysis and Applications* (Advances in Math. Supplementary Studies, vol. 7B), Academic Press, New York (1981), 741-747.
124. W. Rudin, *Well-distributed measurable sets*, *Amer. Math. Monthly* 90 (1983), 41-42.
125. W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (3rd ed.), McGraw-Hill, New York (1987).
126. W. Rudin, *Functional Analysis* (2nd ed.), McGraw-Hill, New York (1991).
127. S. Saeki, *A proof of the existence of infinite product probability measures*, *Amer. Math. Monthly* 103 (1992), 682-683.
128. S. Saks, *Theory of the Integral* (2nd ed.), *Monografie Matematyczne*, Warsaw (1937); reprinted by Hafner, New York (1938).
129. I. Schur, *Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinear form en mit Un endlich vielen Veränderlichen*, *J. Reine Angew. Math.* 140 (1911), 1-28; also in *Schur's Gesammelte Abhandlungen*, Vol. I, Springer-Verlag, Berlin (1973), 464-491.
130. J. Schwartz, *A note on the space L^p* , *Proc. Amer. Math. Soc.* 2 (1951), 270-275.
131. J. Schwartz, *The formula for change of variables in a multiple integral*, *Amer. Math. Monthly* 61 (1954), 81-85.
132. L. Schwartz, *Théorie des Distributions* (2nd ed.), Hermann, Paris (1966).
133. J. Serrin and D. E. Varberg, *A general chain rule for derivatives and the change of variables formula for the Lebesgue integral*, *Amer. Math. Monthly* 76 (1969), 514-520.
134. W. Sierpinski, *Sur un problème concernant M_σ ensembles mesurables superficiellement*, *Fund. Math.* 1 (1920), 112-115; also in *Sierpiński's Oeuvres Choisies*, vol. II, Polish Scientific Publishers, Warsaw (1975), 328-330.
135. R. M. Sullyan and M. Fitting, *Set Theory and the Continuum Problem*, Oxford University Press, Oxford, U.K. (1996).
136. S. L. Sobolev, *A new method for solving the Cauchy problem for normal linear hyperbolic ec Russian*

- Mat. Sbornik 1(43) (1936), 39-72.
137. S. L. Sobolev, On a theorem of functional analysis [Mat. Sbornik 4(46) (1938), 471-496.
138. R. M. Solovay, A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, *Annals of Math.* 92 (1970), 1-56.
139. S. M. Srivastava, *A Course in Borel Sets*, Springer-Verlag, New York (1998).
140. E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1970).
141. E. M. Stein, *Harmonic Analysis*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1993).
142. E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1971).
143. H. Steinhaus, Additive und stetige Funktional operationen, *Math. Zeit.* 5 (1919), 186-221; also pp. 252-288 in Steinhaus's Selected Papers, Polish Scientific Publishers, Warsaw (1985).
144. M. Stoica, of the theory of coexact niw to ,ettetal topo lo Trw et. Soc. 5, 7.
145. M. H. Stone, The generalized Weierstrass approximation theorem, *Math. Mag.* 21(1948), 167-184 and 237-254; reprinted in R. C. Buck (ed.), *Studies in Modern Analysis*, Mathematical Association of America, Washington, D.C. (1962), 30-87.
146. K. Stromberg, The Banach-Tarski paradox, *Amer Math. Monthly* 86 (1979), 15-1161.
147. M. E. Taylor, *Pseudod Operators*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1981).
148. H. J. ter Horst, Riemann-Stieltjes and Lebesgue-Stieltjes integrability, *Amer Math. Monthly* 91 (1984), 55-1-559.
149. G. O. Thorin, An extension of a convexity theorem due to M. Riesz, *Kunigi. Fysiografiska Saellskapet i Lund. Forhaendlingar* 8 (1939), No. 14.
150. F. Trèves, *Topological Vector Spaces, Distributions, and Kernels*, Academic Press, New York (1967).
151. A. Tychonoff, Über die topologische Erweiterung von Räumen, *Math. Annalen* 102 (1929), 544-561.
152. P. Urysohn, Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, *Math. Annalen* 94 (1925), 262-295.
153. P. Urysohn, Zum Metrisationsproblem, *Math. Annalen* 94 (1925), 309-315.
154. J. von Neumann, *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*, Gottinger Nachr (1927), 1-57; also in von Neumann's Collected Works, Vol. I, Pergamon Press, New York (1961), 151-207.
155. J. von Neumann, The uniqueness of Haar's measure, *Mat. Sbornik* 1(43) (1936), 721-734; also in von Neumann's Collected Works, Vol. IV, Pergamon Press, New York (1962), 91-104.
156. L. E. Ward, A weak Tychonoff theorem and the axiom of choice, *Proc. Amer Math. Soc.* 13 (1962), 757-758.
157. F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott Foresman, Glenview, Ill. (1971); reprinted by Springer-Verlag, New York (1983).
158. A. Weil, *L'Intégration dans les Groupes Topologiques et ses Applications*, Hermann, Paris (1940).
159. N. Wiener, Differential-space, *J. Math. and Phys.* 2 (1923), 131-174; also in Wiener's Collected Works, Vol. I, MIT Press, Cambridge, Mass. (1976), 455-598.
160. N. Wiener, The average value of a functional, *Proc. London Math. Soc.* 22(1924), 454-467; also in Wiener's Collected Works, Vol. I, MIT Press, Cambridge, Mass. (1976), 499-512.
161. N. Wiener, The ergodic theorem, *Duke Math. J.* 5(1939), 1-18; also in Wiener's Collected Works, Vol. I, MIT Press, Cambridge, Mass. (1976), 672-689.

162. C. S. Wong, A note on the central limit theorem, Amer Math. Monthly 84(1977), 472.
163. K. Yosida, Functional Analysis (6th ed.), Springer-Verlag, New York (1980).
164. W. H. Young, On the multiplication of successions of Fourier constants, Proc. Royal Soc. (A) 87 (1912), 331-339.
165. A. C. Zaanen, Continuity of measurable functions, Amer Math. Monthly 93 (1986), 128-130.
166. A. Zygmund, On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operators, J. Math. Pures Appl. (9) 35 (1956), 223-248.
167. A. Zygmund, Trigonometric Series (2 vols., reprinted in 1 vol.), Cambridge University Press, Cambridge, U.K. (1968).

واژه نامه فارسی به انگلیسی

Henstock-Kurzweil integral	انتگرال کورزوویل - هنستوک	Parseval's identity	اتحاد پارسوال
Lebesgue integral	انتگرال لیگ	Ordinal	آردینال
Lebesgue-Stieltjes integral	انتگرال لیگ - اشتلیس	Countable ordinals	آردینال های شمارش پذیر
Measure	اندازه	Transfinite induction	استقرای ترامتناهی
Borel	برل	Saturation of a measure	اشباع یک اندازه
Continuous	پیوسته	Well ordering principle	اصل خوشترتیبی
Decomposable	تجزیه پذیر	Uniform boundedness principle	اصل کرانداری یکنواخت
finitely additive	جمعی متناهی	Hausdorff maximal principle	اصل ماکسیمال هاسدورف
outer	خارجی	Axiom	اصل موضوع
inner	داخلی	of separation	جناهی پذیری
Dirac	دیراک	of choice	انتخاب
dicrete	دیریکله	of countability	شمارش پذیری
σ -finite	σ - متناهی	Sides of a rectangle	اضلاع یک مستطیل
counting	شمارشی	Partition	افراز
signed	علامت دار	Tagged	برچسب دار
complete	کامل	of unity	واحد
Lebesgue	لیگ	of an interval	یک بازه
Lebesgue-Stieltjes	لیگ - اشتلیس	L^p weak	L^p ی ضعیف
positive	مثبت	Tagged partition	افراز برچسب دار
complex	مختلط	Weak L^p	L^p ی ضعیف
regular	منظم	Adjoint	الحاق
singular	منفرد	Conditional expectation	امید شرطی
semifinite	نیمه متناهی	Integral	انتگرال
Saturated measure	اندازه اشباع شده	Bochner	بوخنر
Borel measure	اندازه برل	Daniell	دانیل
Decomposable measure	اندازه تجزیه پذیر	Riemann	ریمان
Continuous measure	اندازه پیوسته	fractional	کسری
Product measure	اندازه حاصل ضربی	Henstock-Kurzweil	کورزوویل - هنستوک
Inner measure	اندازه داخلی	Lebesgue	لیگ
Dirac measure	اندازه دیراک	Lebesgue-Stieltjes	لیگ - اشتلیس
σ -finite measure	اندازه σ - متناهی	of a real function	یک تابع حقیقی
Counting measure	اندازه شمارشی	of a simple function	یک تابع ساده
Signed measure	اندازه علامت دار	of a complex function	یک تابع مختلط
σ -finite signed measure	اندازه علامت دار σ - متناهی	of a nonnegative function	یک تابع نامنفی
Finite signed measure	اندازه علامت دار متناهی	Bochner integral	انتگرال بوخنر
Complete measure	اندازه کامل	Uniform integrability	انتگرال پذیری یکنواخت
Discrete measure	اندازه گسسته	Daniell integral	انتگرال دانیل
Lebesgue measure	اندازه لیگ	Riemann integral	انتگرال ریمان
Finite measure	اندازه متناهی	Fractional integral	انتگرال کسری
Finitely additive measure	اندازه متناهی جمعی		

of a measure	یک اندازه	Positive measure	اندازه مثبت
of a function	یک تابع	Complex measure	اندازه مختلط
Holder continuity	پیوستگی هولدر	Regular measure	اندازه منظم
Cover	پوشش	Singular measure	اندازه منفرد
Locally finite cover	پوشش متناهی موضعی	Semifinite measure	اندازه نیمه متناهی
Function	تابع	Mutually singular measures	اندازه‌های دو به دو منفرد
Measurable function	تابع اندازه‌پذیر	First uncountable ordinal	اولین اردینال شمارش‌ناپذیر
Borel measurable function	تابع اندازه‌پذیر برل	Ideal in an algebra	ایدهال در یک جبر
Lebesgue measurable function	تابع اندازه‌پذیر لیبگ	Isometry	ایزومتري
Integrable function	تابع انتگرال‌پذیر	Isomorphism	ایزومورفیسم
Extended	توسیع یافته	Borel	برل
Weakly	ضعیف	order	ترتیبی
Locally	موضعی	linear	خطی
Extended integrable function	تابع انتگرال‌پذیر توسیع یافته	unitary	یکالی
Riemann integrable function	تابع انتگرال‌پذیر ریمان	Borel isomorphism	ایزومورفیسم برل
Left continuous function	تابع پیوسته چپ	Order isomorphism	ایزومورفیسم ترتیبی
Right continuous function	تابع پیوسته راست	Infimum	اینفیمم
Distribution function	تابع توزیع	Bounded variation	با تغییر محدود
Simple function	تابع ساده	Decreasing rearrangement	بازآرایی نزولی
Increasing function	تابع صعودی	Shrink nicely	با ظرافت چسبیدن
Linear functional	تابع خطی	Positive part of a function	بخش مثبت یک تابع
Sublinear functional	تابع خطی زیر جمعی	Negative part of a function	بخش منفی یک تابع
Cantor function	تابع کانتور	Section of a set or function	بخش یک مجموعه یا یک تابع
Cantor-Lebesgue function	تابع کانتور - لیبگ	Range	برد
Gamma function	تابع گاما	Essential range	برد اساسی
Maximal function	تابع ماکسیمال	Closure	بستار
Hardy-Little-wood maximal function	تابع ماکسیمال هاردی - لیتل‌وود	Banach-Tarski paradox	پارادوکس باناخ - تارسکی
Convex function	تابع محدب	Base for a topology	پایه برای یک توپولوژی
Compactly supported function	تابع محمل فشرده	Orthonormal basis	پایه متعامد
Characteristic function	تابع مشخصه	Neighborhood base	پایه همسایه‌های
Indicator function	تابع مشخصه	Premeasure	پیش‌اندازه
Locally integrable function	تابع موضعاً انتگرال‌پذیر	Continuum	پیوستار
Decreasing function	تابع نزولی	Continuity	پیوستگی
Monotone function	تابع یکنوا	of measures	اندازه‌ها
Jordan decomposition	تجزیه جردن	Lipschitz	لیپ شیتز
of a signed measure	یک اندازه علامت‌دار	absolute	مطلق
of a function	یک تابع	Holder	هولدر
Polar decomposition	تجزیه قطبی	uniform	یکنواخت
Lebesgue decomposition	تجزیه لیبگ	Lipschitz continuity	پیوستگی لیپ شیتزی
Hahn decomposition	تجزیه هان	Absolute continuity	پیوستگی مطلق

cofinite	هم‌پایان	Vanish at infinity	تحلیل رفتن در بینهایت
of uniform convergence	همگرایی یکنواخت	Condensation of singularities	تراکم تکین‌ها
Trivial topology	توپولوژی بدیهی	Transpose	ترانپوز
Order topology	توپولوژی ترتیبی	Partial ordering	ترتیب جزئی
Product topology	توپولوژی حاصلضربی	Total ordering	ترتیب کلی
Quotient topology	توپولوژی خارج قسمتی	Linear ordering	ترتیب خطی
Coarser topology	توپولوژی درشت	Composition	ترکیب
Zariski topology	توپولوژی زاریسکی	Total variation	تغییر کل
Weak topology	توپولوژی ضعیف	of a signed measure	یک اندازه علامت‌دار
Weaker topology	توپولوژی ضعیف‌تر	of a complex measure	یک اندازه مختلط
Weak operator topology	توپولوژی عملگری ضعیف	of a function	یک تابع
Strong operator topology	توپولوژی عملگری قوی	Positive variation	تغییر مثبت
Finer topology	توپولوژی فیلتر	of a signed measure	یک اندازه علامت‌دار
Stronger topology	توپولوژی قوی	of a function	یک تابع
Discrete topology	توپولوژی گسسته	Image	تصویر
Indiscrete topology	توپولوژی ناگسسته	Projection	تصویر
Norm topology	توپولوژی نرمی	Orthogonal	متعامد
Relative topology	توپولوژی نسبی	Orthogonal projection	تصویر متعامد
Cofinite topology	توپولوژی هم‌متناهی	Inverse image	تصویر معکوس
Net	تور	Refinement of a cover	تظریف یک پوشش
Cauchy net	تور کشی	Negative variation	تغییر منفی
Cofinal net	تور هم‌پایان	of a signed measure	یک اندازه علامت‌دار
A.e.	ت.ه.	of a function	یک تابع
Algebra	جبر	Symmetric difference	تفاضل متقارن
Banach	باناخ	Difference of sets	تفاضل مجموعه‌ها
of functions	توابع	Almost every(where)	تقریباً همه جا
of sets	مجموعه	Topology	توپولوژی
Separation	جداسازی	trivial	بدیهی
of points	نقاط	generated by a family of sets	تولید شده با خانواده‌ای از مجموعه‌ها
of points and closed sets	نقاط و مجموعه‌های بسته	product	حاصلضربی
Banach algebra	جبر باناخ	quotient	خارج قسمتی
Completely regular algebra	جبر کاملاً منظم	weak*	W^*
Point mass	جرم نقطه‌ای	on compact sets	روی مجموعه‌های فشرده
Countable additivity	جمع‌پذیری شمارش‌پذیر	Zariski	زاریسکی
Scalar product	حاصلضرب اسکالر	weak	ضعیف
Cartesian product	حاصلضرب دکارتی	weak operator	عملگری ضعیف
Limit inferior	حد اسفل	strong operator	عملگری قوی
Limit superior	حد اعلی	indiscrete	ناگسسته
Limit of a net	حد یک تور	norm	نرمی
Ring of sets	حلقه مجموعه‌ها	relative	نسبی

Reverse inclusion	شمول عکس	Bolzano-Weierstrass property	خاصیت بولزانو - وایر شتراس
Inner product	ضرب داخلی	Finite intersection property	خاصیت مقطع متناهی
Maximal element	عضو ماکسیمال	Heine-Borel property	خاصیت هاینه - بزل
Minimal element	عضو مینیمال	Elementary family	خانواده مقدماتی
Closure operator	عملگر بستاری	Pointwise bounded family	خانواده نقطه به نقطه کراندار
Hull of an ideal	غلاف	Well ordering	خوشترتیبی
Gram-Schmidt process	فرآیند گرام - اشمیت	Domain	دامنه
Compactification	فشرده سازی	Weak* topology	W^* - توپولوژی
Stone-tech one-point	استون - چخ تک نقطه ای	Interior	درون
Stone-Cech compactification	فشرده سازی استون - چخ	Extended real number system	دستگاه اعداد حقیقی توسعه یافته
Alexandroff compactification	فشرده سازی الکساندروف	Sequence	دنباله
One-point compactification	فشرده سازی تک نقطه ای	Diffeomorphism	دیفومورفیسم
Continuum hypothesis	فرضیه پیوستار	Relation	رابطه
LCH space	فضای LCH	Equivalence relation,	رابطه هم ارزی
L^p space	فضای L^p	Baire classes	رده بئر
Measure space	فضای اندازه	Equivalence class	رده هم ارزی
Measurable space	فضای اندازه پذیر	Dense subset	زیر مجموعه چگال
Reflexive space	فضای بازتابی	of a set	از یک مجموعه
Banach space	فضای باناخ	Subbase for a topology	زیر پایه برای یک توپولوژی
Topological vector space	فضای برداری توپولوژیک	Subordination	پیرو
Complete topological vector space	فضای برداری توپولوژیک کامل	Subsequence	زیر دنباله
Normed vector space	فضای برداری نرم دار	Subnet	زیر تور
Countably compact space	فضای به طور شمارش پذیر فشرده	Subadditivity	زیر جمعی
Topological space	فضای توپولوژیک	Subspace of a vector space	زیر فضای یک فضای برداری
Tychonoff space	فضای تیخونف	Supremum	سوپریمم
Paracompact space	فضای پیرافشرده	Essential Supremum	سوپریمم اساسی
Pre-Hilbert space	فضای پیش هیلبرت	σ -algebra	σ - جبر
T_0, \dots, T_7 space	فضای T_0, \dots, T_7	Borel	بزل
Separable space	فضای جدایی پذیر	generated by a family of functions	تولید شده با خانواده ای از توابع
Quotient space	فضای خارج قسمتی	generated by a family of sets	تولید شده با خانواده ای از مجموعه ها
Normed linear space	فضای خطی نرم دار	product	حاصلضربی
Dual space	فضای دوگان	of countable or co-countable sets	شمارش پذیر یا متمم شمارش پذیر
σ -compact space	فضای σ - فشرده	Borel σ -algebra	σ - جبر بزل
First countable space	فضای شمارش پذیر اول	Product σ -algebra	σ - جبر حاصلضربی
Second countable space	فضای شمارش پذیر دوم	σ -ring	σ - حلقه
Fréchet space	فضای فرشه	σ -field	σ - میدان
Compact space	فضای فشرده	Lattice of functions	شیکهای از توابع
Sequentially compact space	فضای فشرده دنباله ای	Countably	شمارش پذیر
Completely regular space	فضای کاملاً منظم	sequentially	دنباله ای
		locally	موضعی

Hahn-Banach dominated convergence	هان - باناخ همگرایی مغلوب	Metric space	فضای متریک
monotone convergence	همگرایی یکنوا	Complete metric space	فضای متریک کامل
Vitali convergence	همگرایی ویتالی	Regular space	فضای منظم
Arzelà-Ascoli theorem	قضیه آرزلا - اسکولی	Locally compact space	فضای موضعی فشرده
Alaoglu's theorem	قضیه آلا آغلو	Locally convex space	فضای موضعی محدب
Stone-Weierstrass theorem	قضیه استون - وایر شتراس	Normal space	فضای نرمال
Egoroff's theorem	قضیه ایگوروف	Hausdorff space	فضای هاسدورف
Fundamental theorem of calculus	قضیه بنیادی حسابان	Hilbert space	فضای هیلبرت
Jordan decomposition theorem	قضیه تجزیه جردن	Filter	فیلتر
Hahn decomposition theorem	قضیه تجزیه هان	Law of large numbers	قانون اعداد بزرگ
Weierstrass approximation theorem	قضیه تقریب وایر شتراس	Parallelogram law	قانون متوازی الاضلاع
Tietze extension theorem	قضیه توسیع تیتسه	Semifinite part	قسمت نیمه متناهی
Krein extension theorem	قضیه توسیع کرین	Theorem	قضیه
Tonelli's theorem	قضیه تونلی	Arzelà-Ascoli	آرزلا - اسکولی
Fubini-Tonelli theorem	قضیه فوبینی - تونلی	Stone-Weierstrass	استون - وایر شتراس
Tychonoff's theorem	قضیه تیخونف	Alaoglu's	آلا آغلو
Vitali covering theorem	قضیه پوشش ویتالی	Egoroff's	ایگوروف
Lebesgue-Radon-Nikodym theorem	قضیه رادون - لیک - نیکودیم	Vitali covering	پوشش ویتالی
Radon-Nikodym theorem	قضیه رادون - نیکودیم	Jordan decomposition	تجزیه جردن
Riesz-Thorin interpolation theorem	قضیه درون یابی ریس - تورین	Hahn decomposition	تجزیه هان
Marcinkiewicz interpolation theorem	قضیه درون یابی مارکینکویچ	Weierstrass approximation	تقریب وایر شتراس
Schroder-Bernstein theorem	قضیه شرودر برنشتاین	Tietze extension	توسیع تیتسه
Fubini's theorem	قضیه فوبینی	Krein extension	توسیع کرین
Pythagorean theorem	قضیه فیثاغورس	Tychonoff's	تیخونف
Carathéodory's theorem	قضیه کاراتهودوری	Riesz-Thorin interpolation	درون یابی ریس - تورین
Baire category theorem	قضیه کاتگوری بئر	Marcinkiewicz interpolation	درون یابی مارکینکویچ
Maximal theorem	قضیه ماکسیمال	Radon-Nikodym	رادون - نیکودیم
Urysohn metrization theorem	قضیه متریک سازی اوریسون	Schroder-Bernstein	شرودر - برنشتاین
Lebesgue differentiation theorem	قضیه مشتق گیری لیک	Fubini-Tonelli	فوبینی - تونلی
Open mapping theorem	قضیه نگاشت باز	Pythagorean	فیثاغورس
Closed graph theorem	قضیه نمودار بسته	Baire category	کاتگوری بئر
Hahn-Banach theorem	قضیه هان - باناخ	Carathéodory's	کاراتهودوری
Dominated convergence theorem	قضیه همگرایی مغلوب	Lebesgue-Radon-Nikodym	لیک - رادون - نیکودیم
Vitali convergence theorem	قضیه همگرایی ویتالی	Lusin's	لوزین
Monotone convergence theorem	قضیه همگرایی یکنوا	maximal	ماکسیمال
Diameter	قطر	Urysohn metrization	متریک سازی اوریسون
Initial segment	قطعه اولیه	Lebesgue differentiation	مشتق گیری لیک
DeMorgan's laws	قوانین دمورگان	open mapping	نگاشت باز
First category	کاتگوری اول	closed graph	نمودار بسته
		Fourier inversion	وارون فوریه

Null set	مجموعه بوج	Second category	کاتگوری دوم
locally	موضعی	Upper bound	کران بالا
Precompact set	مجموعه پیش فشرده	Lower bound	کران پایین
Directed set	مجموعه جهت دار	Completion of a measure	کامل شده یک اندازه
σ -finite set	مجموعه σ -متناهی	Convolution	کانولوشن
Denumerable set	مجموعه شمارا	of a σ -algebra	σ -جبر
Countable set	مجموعه شمارش پذیر	of a normed vector space	یک فضای برداری نرمال
Compact set	مجموعه فشرده	Cauchy	کشی
Cantor Set	مجموعه کانتور	in measure.	در اندازه
Generalized Cantor set	مجموعه کانتور تعمیم یافته	Sequence	دنباله
Bounded set	مجموعه کراندار	Monotone class	کلاس یکنوا
Totally bounded set	مجموعه کراندار کلی	Discrete	گسسته
Lebesgue set	مجموعه لیگ	Content	گنجایش
Orthogonal set	مجموعه متعامد	Jordan content	گنجایش جردن
Orthonormal set	مجموعه متعامد	Ball	گوی
Complete orthonormal set	مجموعه متعامد بکده کامل	Lemma	لم
Positive set	مجموعه مثبت	Urysohn's	اوریسون
Locally measurable set	مجموعه موضعا اندازه پذیر	Borel-Cantelli	برل - کانتلی
Locally null set	مجموعه موضعا بوج	Zorn's	زورن
Disconnected set	مجموعه ناهمبند	three lines	سه خط
Meager set	مجموعه لحيف	Fatou's	فاتو
F_σ and $F_{\sigma\delta}$ sets	مجموعه های F_σ و $F_{\sigma\delta}$	monotone class	کلاس یکنوا
G_δ and $G_{\delta\sigma}$ sets	مجموعه های G_δ و $G_{\delta\sigma}$	Urysohn's lemma	لم اوریسون
Disjoint sets	مجموعه های مجزا	Zorn's lemma	لم زورن
Negative set	مجموعه های منفی	Three lines lemma	لم سه خط
Connected set	مجموعه همبند	Fatou's lemma	لم فاتو
Arwise connected set	مجموعه همبند راهی	Monotone class lemma	لم کلاس یکنوا
Nowhere dense set	مجموعه هیچ جا چگال	Metric	متر
Support	محمل	Product metric	متر حاصلضربی
of a function	یک تابع	Equivalent metrics	مترهای همراز
Coordinate	مختص	Complement	متمم
Polar coordinates	مختصات قطبی	Measurable set	مجموعه اندازه پذیر
Boundary	مرز	Lebesgue	لیگ
Conjugate exponent	مزدوج نمایی	Locally	موضعی
Rectangle	مستطیل	with respect to an outer measure	نسبت به یک اندازه خارجی
Derivative	مشتق	Lebesgue measurable set	مجموعه اندازه پذیر لیگ
Radon-Nikodym	رادون - نیکودیم	Open set	مجموعه باز
Radon-Nikodym derivative	مشتق رادون - نیکودیم	Borel set	مجموعه برل
Absolute convergence	مطلقا همگرا	Closed set	مجموعه بسته
Heat equation	معادله حرارت	Residual set	مجموعه پس مانده

Cluster point	نقطه بستاری	Inverse	معکوس
Map	نگاشت	Predecessor	مقدم
Mapping	نگاشت	Gauge	مقیاس
Measurable mapping	نگاشت اندازه پذیر	Frequently	مکرراً
Open map	نگاشت باز	Cube	مکعب
Surjective mapping	نگاشت پوشا	Connected component	مؤلفه همبند
Closed linear map	نگاشت خطی بسته	Field of sets	میدان مجموعه ها
Bounded linear map	نگاشت خطی کراندار	Inequality	نامساوی
Invertible linear map	نگاشت خطی معکوس پذیر	Bessel's	بسل
Bijjective mapping	نگاشت دوسویی	Chebyshev's	چبیشف
Sublinear map	نگاشت زیرخطی	Schwarz	شوارتز
Proper map	نگاشت سره	Triangle	مثلثی
Coordinate map	نگاشت مؤلفه ای	Minkowski's	مینکوفسکی
Unitary map	نگاشت یکانی	Hardy's	هاردی
Injective mapping	نگاشت یک به یک	Hubert's	هوبرت
Standard representation of a simple function	نمایش استاندارد یک تابع ساده	Holder's	هولدر
Graph of a linear map	نمودار نگاشت خطی	Jensen's	ینسن
Weak type	نوع ضعیف	Bessel's inequality	نامساوی بسل
Strong type	نوع قوی	Chebyshev's inequality	نامساوی چبیشف
Eventually	نهایتاً	Schwarz inequality	نامساوی شوارتز
Conditional	مشروط	Triangle inequality	نامساوی مثلثی
H-interval	نیم بازه	Minkowski's inequality for integrals	نامساوی مینکوفسکی برای انتگرال ها
Seminorm	نیم نرم	Hardy's inequalities	نامساوی هاردی
Kernel of a closed set	هسته یک مجموعه بسته	Holder's inequality	نامساوی هولدر
Equicontinuity	هم پیوستگی	Hilbert's inequality	نامساوی هیلبرت
Neighborhood	همسایگی	Jensen's inequality	نامساوی ینسن
Convergence	همگرایی	Norm	نرم
almost uniform in L^1	تقریباً یکنواخت در L^1	L^p	L^p
in measure	در اندازه	product	حاصلضربی
absolute	مطلق	quotient	خارج قسمتی
of a net	یک تور	operator	عملگری
of a sequence	یک دنباله	uniform	یکنواخت
of a series	یک سری	L^p norm	نرم L^p
of a filter	یک فیلتر	Product norm	نرم حاصلضربی
Almost uniform convergence	همگرایی تقریباً یکنواخت	Operator norm	نرم عملگری
Weak convergence	همگرایی ضعیف	Equivalent norms	نرم های هم ارز
Mean ergodic theorem	همه سوی میانگین	Uniform norm	نرم یکنواخت
Homeomorphism	همیومورفیسم	Embedding	نشاندن
		Accumulation point	نقطه انباشتی

Monotonicity of measures

یکنوازی اندازه‌ها

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A

Absolute continuity of a function of a measure	پیوستگی مطلق یک تابع یک اندازه
Absolute convergence	مطلقاً همگرا
Accumulation point	نقطه انباشتی
Adjoint	الحاق
A.e.	ت. ه.
Alaoglu's theorem	قضیه آلا آگلو
Alexandroff compactification	فشرده‌سازی الکساندروف
Algebra	جبر
Banach of functions of sets	باناخ توابع مجموعه
Almost every(when)	تقریباً همه جا
Almost uniform convergence	همگرایی تقریباً یکنواخت
Arcwise connected set	مجموعه همبند راهی
Arzelà-Ascoli theorem	قضیه آرزلا - آسکولی
Axiom of choice of countability of separation	اصل موضوع انتخاب شمارش پذیری جدایی پذیری

B

Baire category theorem	قضیه کاتگوری بئر
Baire classes	رده بئر
Ball	گوی
Banach algebra	جبر باناخ
Banach space	فضای باناخ
Banach-Tarski paradox	پارادوکس باناخ - تارسکی
Base for a topology	پایه برای یک توپولوژی
Bessel's inequality	نامساوی بسل
Bijjective mapping	نگاشت دوسویی
Bochner integral	انتگرال بوچنر
Bolzano-Weierstrass property	خاصیت بولزانو - وایر شتراس
Borel isomorphism	ایزومورفیسم بزل
Borel measurable function	تابع اندازه پذیر بزل

Borel measure	اندازه بزل
Borel set	مجموعه بزل
Borel σ -algebra	σ - جبر بزل
Boundary	مرز
Bounded linear map	نگاشت خطی کراندار
Bounded set	مجموعه کراندار
Bounded variation	با تغییر محدود

C

Cantor function	تابع کانتور
Cantor Set	مجموعه کانتور
Cantor-Lebesgue function	تابع کانتور - لیگ
Carathéodory's theorem	قضیه کاراتودوری
Cartesian product	اصلضرب دکارتی
Cauchy net	تور کشی
Cauchy Sequence in measure	کشی دنباله در اندازه
Characteristic function	تابع مشخصه
Chebyshev's inequality	نامساوی چبشف
Closed graph theorem	قضیه نگار بسته
Closed linear map	نگاشت خطی بسته
Closed set	مجموعه بسته
Closure	بستار
Closure operator	عملگر بستاری
Cluster point	نقطه بستاری
Coarser topology	توپولوژی درشت
Cofinal net	تور هم‌پایان
Cofinite topology	توپولوژی متمم منتهای
Compact set	مجموعه فشرده
Compact space	فضای فشرده
Countably locally sequentially compactification one-point Stone-tech	شمارش پذیر موضعی دنباله‌ای فشرده‌سازی تک نقطه استون - چچ
Compactly supported function	تابع محمل فشرده
Complement	متمم
Complete measure	اندازه کامل
Complete metric space	فضای متریک کامل

Complete orthonormal set	مجموعه متعامد یکه کامل	Decreasing function	تابع نزولی
Complete topological vector space	فضای برداری توپولوژیک کامل	Decreasing rearrangement	بازآرایی نزولی
Completely regular algebra	جبر کاملاً منظم	DeMorgan's laws	قوانین دم‌رگان
Completely regular space	فضای کاملاً منظم	Dense subset of a set	زیرمجموعه چگال از یک مجموعه
Completion of a measure of a normed vector space of a σ -algebra	یک فضای برداری نرم‌ساز σ - جبر	Denumerable set	مجموعه شمارا
Complex measure	اندازه مختلط	Derivative Radon-Nikodym	مشتق رادون - نیکودیم
Composition	ترکیب	Diameter	قطر
Condensation of singularities	تراکم تکین‌ها	Diffeomorphism	دیفئومورفیسم
Conditional expectation	امید شرطی	Difference of sets	تفاضل مجموعه‌ها
Conjugate exponent	مزدوج نمایی	Dirac measure	اندازه دیراک
Connected component	مؤلفه همبند	Directed set	مجموعه جهت‌دار
Connected set	مجموعه همبند	Disconnected set	مجموعه ناهمبند
Content	گنجایش	Discrete	گسسته
Continuity absolute	پیوستگی مطلق	Discrete measure	اندازه گسسته
Holder	هولدر	Discrete topology	توپولوژی گسسته
Lipschitz of measures uniform	لیپ شیتز اندازه‌ها	Disjoint sets	مجموعه‌های مجزا
Continuous measure	یکنواخت	Distribution function	تابع توزیع دامنه
Continuum	اندازه پیوسته	Domain	فضای همگرایی مغلوب
Continuum hypothesis	پیوستار فرضیه پیوستار	Dominated convergence theorem	قضیه همگرایی مغلوب فضای دوگان
Convergence absolute	همگرایی مطلق	Dual space	
almost uniform in L^1	تقریباً یکنواخت در L^1	E	
in measure of a filter of a net of a sequence of a series	در اندازه یک فیلتر یک تور یک دنباله یک سری	Egoroff's theorem	قضیه ایگوروف
Convex function	تابع محدب	Elementary family	خانواده مقدماتی
Convolution	کانولوشن	Embedding	نشانندن
Coordinate	مختصن - مؤلفه	Equicontinuity	هم‌پیوستگی
Coordinate map	نگاشت مؤلفه‌ای	Equivalence class	رده هم‌ارزی
Countable additivity	جمع‌پذیری شمارش‌پذیر	Equivalence relation,	رابطه هم‌ارزی
Countable ordinals	ارڈینال‌های شمارش‌پذیر	Equivalent metrics	مترهای هم‌ارز
Countable set	مجموعه شمارش‌پذیر	Equivalent norms	نرم‌های هم‌ارز
Countably compact space	فضای به‌طور شمارش‌پذیر فشرده	Essential range	برد اساسی
Counting measure	اندازه شمارشی	Essential Supremum	سوپریمم اساسی
Cover	پوشش	Eventually	نهایتاً
Cube	مکعب	Conditional	مشروط
D		Extended integrable function	تابع انتگرال‌پذیر توسعه یافته
Daniell integral	انتگرال دانیل	Extended real number system	دستگاه اعداد حقیقی توسعه یافته
Decomposable measure	اندازه تجزیه‌پذیر	F	
		F_σ and F_π sets	مجموعه‌های F_σ و F_π
		Fatou's lemma	لم فاتو
		Field of sets	میدان مجموعه‌ها
		Filter	فیلتر
		Finer topology	توپولوژی فیلتر
		Finite intersection property	خاصیت مقطع متناهی
		Finite measure	اندازه متناهی

Finite signed measure	اندازه علامت‌دار متناهی
Finitely additive measure	اندازه متناهیاً جمعی
First category	کاتگوری اول
First countable space	فضای شمارش‌پذیر اول
First uncountable ordinal	اولین اردینال شمارش‌ناپذیر
Fractional integral	انتگرال کسری
Frequently	مکرراً
Fréchet space	فضای فرشه
Fubini's theorem	قضیه فوبینی
Fubini-Tonelli theorem	قضیه تونلی - فوبینی
Function	تابع
Fundamental theorem of calculus	قضیه بنیادی حسابان

G

G_δ and $G_{\delta\sigma}$ sets	مجموعه‌های G_δ و $G_{\delta\sigma}$
Gamma function	تابع گاما
Gauge	مقیاس
Generalized Cantor set	مجموعه کانتور تعمیم یافته
Gram-Schmidt process	فرآیند گرام - اشمیت
Graph of a linear map	نمودار نگاشت خطی

H

H-interval	نیم‌بازه
Hahn decomposition	تجزیه هان
Hahn decomposition theorem	قضیه تجزیه هان
Hahn-Banach theorem	قضیه هان - باناخ
Hardy's inequalities	نامساوی هاردی
Hardy-Little wood maximal function	تابع ماکسیمال هاردی - لیتل‌وود
Hausdorff maximal principle	اصل ماکسیمال هاسدورف
Hausdorff space	فضای هاسدورف
Heat equation	معادله حرارت
Heine-Borel property	خاصیت هاینه - بول
Henstock-Kurzweil integral	انتگرال کورزوویل - هنستوک
Hilbert space	فضای هیلبرت
Hilbert's inequality	نامساوی هیلبرت
Homeomorphism	همیومورفیسم
Hull of an ideal	غلاف یک ایده آل
Holder continuity	پیوستگی هولدر
Holder's inequality	نامساوی هولدر

I

Ideal in an algebra	ایده‌آل در یک جبر
Image	تصویر
Increasing function	تابع صعودی
Indicator function	تابع مشخصه
Indiscrete topology	توپولوژی ناگسسته
Inequality	نامساوی

Bessel'	بسل
Chebyshev's	چیشف
Hardy's	هاردی
Hubert's	هوبرت
Holder's	هولدر
Jensen's	ینسن
Minkowski's	مینگوفسکی
Schwarz	شوارتز
Triangle	مثلثی

Infimum	اینفیمم
Initial segment	قطعه اولیه
Injective mapping	نگاشت انژکتیو
Inner measure	اندازه داخلی
Inner product	ضرب داخلی
Integrable function	تابع انتگرال‌پذیر
weakly	ضعیف
extended	توسیع یافته
locally	موضعی
Integral	انتگرال
Bochner	بوخنر
Daniell	دانیل
fractional	کسری
Henstock-Kurzweil	کورزوویل - هنستوک
Lebesgue	لیگ
Lebesgue-Stieltjes	لیگ - اشتلیس
of a complex function	یک تابع مختلط
of a nonnegative function	یک تابع نامنفی
of a real function	یک تابع حقیقی
of a simple function	یک تابع ساده
Riemann	ریمان

Interior	درون
Inverse	معکوس
Inverse image	تصویر معکوس
Invertible linear map	نگاشت خطی معکوس‌پذیر
Isometry	ایزومتري
Isomorphism	ایزومورفیسم
Borel	بول
linear	خطی
order	ترتیبی
unitary	یکانی

J

Jensen's inequality	نامساوی ینسن
Jordan content	گنجایش جردن
Jordan decomposition	تجزیه جردن
of a function	یک تابع
of a signed measure	یک اندازه علامت‌دار
Jordan decomposition theorem	قضیه تجزیه جردن

K		
Kernel of a closed set	هسته یک مجموعه بسته	
Krein extension theorem	قضیه توسعه کرین	
L		
L^p norm	نرم L^p	
L^p space	فضای L^p	
L^p weak	L^p ضعیف	
Lattice of functions	شبکه‌های از توابع	
Law of large numbers	قانون اعداد بزرگ	
LCH space	فضای LCH	
Lebesgue decomposition	تجزیه لیگ	
Lebesgue differentiation theorem	قضیه مشتق‌گیری لیگ	
Lebesgue integral	انتگرال لیگ	
Lebesgue measurable function	تابع اندازه پذیر لیگ	
Lebesgue measurable set	مجموعه اندازه پذیر لیگ	
Lebesgue measure	اندازه لیگ	
Lebesgue set	مجموعه لیگ	
Lebesgue-Radon-Nikodym theorem	قضیه رادون - لیگ - نیکودیم	
Lebesgue-Stieltjes integral	انتگرال لیگ - اشتلیس	
Lebesgue-Stieltjes measure	اندازه لیگ اشتلیس	
Left continuous function	تابع پیوسته راست	
Lemma	لم	
Borel-Cantelli	برل - کانتلی	
Fatou's	فاتو	
monotone class	کلاس یکنوا	
three lines	سه خط	
Urysohn's	اوریسون	
Zorn's	زورن	
Limit inferior	حد اسفل	
Limit of a net	حد یک تور	
Limit superior	حد اعلی	
Linear functional	تابع خطی	
Linear ordering	ترتیب خطی	
Lipschitz continuity	پیوستگی لبش شیتزی	
Locally compact space	فضای موضعا فشرده	
Locally convex space	فضای موضعا محدب	
Locally finite cover	پوشش متناهی موضعی	
Locally integrable function	تابع موضعا انتگرال پذیر	
Locally measurable set	مجموعه موضعا اندازه پذیر	
Locally null set	مجموعه موضعا بوج	
Lower bound	کران پایین	
M		
Map	نگاشت	
Mapping	نگاشت	
Marcinkiewicz interpolation theorem	قضیه درون‌یابی مارکینکویچ	
Maximal element	عضو ماکسیمال	
Maximal function	تابع ماکسیمال	
Maximal theorem	قضیه ماکسیمال	
Meager set	مجموعه نحیف	
Mean ergodic theorem	قضیه همه سویی میانگین	
Measurable function	تابع اندازه پذیر	
Measurable mapping	نگاشت اندازه پذیر	
Measurable set	مجموعه اندازه پذیر	
Lebesgue	لیگ	
Locally	موضعی	
with respect to an outer measure	نسبت به یک اندازه خارجی	
Measurable space	فضای اندازه پذیر	
Measure	اندازه	
Borel	برل	
complete	کامل	
complex	مختلط	
continuous	پیوسته	
counting	شمارشی	
decomposable	تجزیه پذیر	
dicrete	دیریکله	
Dirac	دیراک	
finitely additive	جمعی متناهی	
inner	داخلی	
Lebesgue	لیگ	
Lebesgue-Stieltjes	لیگ - اشتلیس	
outer	خارجی	
positive	مثبت	
regular	منظم	
semifinite	نیمه متناهی	
σ -finite	σ - متناهی	
signed	علامت دار	
singular	منفرد	
Measure space	فضای اندازه	
Metric	متر	
Metric space	فضای متری	
Minimal element	عضو مینیمال	
Minkowski's inequality	نامساوی مینکوفسکی	
for integrals	برای انتگرال‌ها	
Monotone class	کلاس یکنوا	
Monotone class lemma	لم کلاس یکنوا	
Monotone convergence theorem	قضیه همگرایی یکنوا	
Monotone function	تابع یکنوا	
Monotonicity of measures	یکنوایی اندازه‌ها	
Mutually singular measures	اندازه‌های دو به دو منفرد	
N		
Negative part of a function	بخش منفی یک تابع	

Negative set	مجموعه‌های منفی	Polar decomposition	تجزیه قطبی
Negative variation of a function of a signed measure	تغییر منفی یک تابع یک اندازه علامت‌دار	Positive measure	اندازه مثبت
Neighborhood	همسایگی	Positive part of a function	بخش مثبت یک تابع
Neighborhood base	پایه همسایه‌ای	Positive set	مجموعه مثبت
Net	تور	Positive variation of a function of a signed measure	تغییر مثبت یک تابع یک اندازه علامت‌دار
Norm	نرم	Pre-Hilbert space	فضای پیش‌هیلبرت
L^p operator product quotient uniform	L^p عملگری حاصلضربی خارج قسمتی یکنواخت	Precompact set	مجموعه پیش‌فشرده
Norm topology	توپولوژی نرمی	Predecessor	مقدم
Normal space	فضای نرمال	Premeasure	پیش‌اندازه
Normed linear space	فضای خطی نرم‌دار	Product measure	اندازه حاصلضربی
Normed vector space	فضای برداری نرم‌دار	Product metric	متر حاصلضربی
Nowhere dense set	مجموعه هیچ‌جا چگال	Product norm	نرم حاصلضربی
Null set locally	مجموعه هیچ‌موضعی	Product σ -algebra	σ -جبر حاصلضربی
O		Product topology	توپولوژی حاصلضربی
One-point compactification	فشرده‌سازی تک نقطه‌ای	Projection	تصویر
Open map	نگاشت باز	Orthogonal	متعامد
Open mapping theorem	قضیه نگاشت باز	Proper map	نگاشت سره
Open set	مجموعه باز	Pythagorean theorem	قضیه فیثاغورس
Operator norm	نرم عملگری	Q	
Order isomorphism	ایزومورفیسم ترتیبی	Quotient space	فضای خارج قسمتی
Order topology	توپولوژی ترتیبی	Quotient topology	توپولوژی خارج قسمتی
Ordinal	آردینال	R	
Orthogonal projection	تصویر متعامد	Radon-Nikodym derivative	مشتق رادون - نیکودیم
Orthogonal set	مجموعه متعامد	Radon-Nikodym theorem	قضیه رادون - نیکودیم
Orthonormal basis	پایه متعامد	Range	برد
Orthonormal set	مجموعه متعامد	Rectangle	مستطیل
P		Refinement of a cover	تطریف یک پوشش
Paracompact space	فضای پیرافشرده	Reflexive space	فضای بازتابی
Parallelogram law	قانون متوازی‌الاضلاع	Regular measure	اندازه منظم
Parseval's identity	اتحاد پارسوال	Regular space	فضای منظم
Partial ordering	ترتیب جزئی	Relation	رابطه
Partition of an interval of unity tagged	افراز یک بازه واحد بر چسب دار	Relative topology	توپولوژی نسبی
Point mass	جرم نقطه‌ای	Residual set	مجموعه پس‌مانده
Pointwise bounded family	خانواده نقطه به نقطه کراندار	Reverse inclusion	شمول عکس
Polar coordinates	مختصات قطبی	Riemann integrable function	تابع انتگرال‌پذیر ریمان
		Riemann integral	انتگرال ریمان
		Riesz-Thorin interpolation theorem	قضیه درون‌یابی ریس - تورین
		Right continuous function	تابع پیوسته راست
		Ring of sets	حلقه مجموعه‌ها
		S	
		Saturated measure	اندازه اشباع‌شده
		Saturation of a measure	اشباع یک اندازه

Scalar product	حاصلضرب اسکالر
Schroder-Bernstein theorem	قضیه شرودر برنشتاین
Schwarz inequality	نامساوی شوارتز
Second category	کاتگوری دوم
Second countable space	فضای شمارش پذیر دوم
Section of a set or function	بخش یک مجموعه یا یک تابع
Semifinite measure	اندازه نیمه منتهای
Semifinite part	قسمت نیمه منتهای
Seminorm	نیم نرم
Separable space	فضای جدایی پذیر
Separation of points	جداسازی نقاط
of points and closed sets	مجموعه‌های بسته
Sequence	دنباله
Sequentially compact space	فضای فشرده دنباله‌ای
Shrink nicely	به خوبی خسبیدن
Sides of a rectangle	اضلاع یک مستطیل
σ -algebra	σ - جبر
Borel	بورل
generated by a family of functions	تولید شده با خانواده‌ای از توابع
generated by a family of sets	تولید شده با خانواده‌ای از مجموعه‌ها
of countable or co-countable sets	شمارش پذیر یا متمم شمارش پذیر
product	حاصلضربی
σ -compact space	فضای σ - فشرده
σ -field	σ - میدان
σ -finite measure	اندازه σ - منتهای
σ -finite set	مجموعه σ - منتهای
σ -finite signed measure	اندازه علامت دار σ - منتهای
σ -ring	σ - حلقه
Signed measure	اندازه علامت دار
Simple function	تابع ساده
Singular measure	اندازه منفرد
Standard representation of a simple function	نمایش استاندارد یک تابع ساده
Stone-Cech compactification	فشرده سازی استون - چخ
Stone-Weierstrass theorem	قضیه استون - وایر شتراس
Strong operator topology	توپولوژی عملگری قوی
Strong type	نوع قوی
Stronger topology	توپولوژی قوی
Subadditivity	زیر جمعی
Subbase for a topology	زیر پایه برای یک توپولوژی
Sublinear functional	تابع خطی زیر جمعی
Sublinear map	نگاشت زیر خطی
Subnet	زیر تور
Subordination	پیرو
Subsequence	زیر دنباله
Subspace of a vector space	زیر فضای یک فضای برداری
Support	محمل

of a function	یک تابع
Supremum	سوپریمم
Surjective mapping	نگاشت پوشا
Symmetric difference	تفاضل متقارن
T	
T_1, \dots, T_n space	فضای T_1, \dots, T_n
Tagged partition	افراز بر حسب دار
Theorem	قضیه
Alaoglu's	آلااگلو
Arzelà-Ascoli	آرژلا - اسکولی
Baire category	کاتگوری بئر
Carathéodory's closed graph	کاراتودوری نمودار بسته
dominated convergence	همگرایی مغلوب
Egoroff's	ایگوروف
Fourier inversion	وارون فوریه
Fubini-Tonelli	فوبینی - تونلی
Hahn decomposition	تجزیه هان
Hahn-Banach	هان - باناخ
Jordan decomposition	تجزیه جردن
Krein extension	توسیع کرین
Lebesgue differentiation	مشق گیری لیبگ
Lebesgue-Radon-Nikodym	لیبگ - رادون - نیکودیم
Lusin's	لوزین
Marcinkiewicz interpolation	درون یابی مارکینکویچ
maximal	ماکسیمال
monotone convergence	همگرایی یکنوا
open mapping	نگاشت باز
Pythagorean	فیثاغورس
Radon-Nikodym	رادون - نیکودیم
Riesz-Thorin interpolation	درون یابی ریس - تورین
Schroder-Bernstein	شرودر - برنشتاین
Stone-Weierstrass	استون - وایر شتراس
Tietze extension	توسیع تیتسه
Tychonoff's	تیخونف
Urysohn metrization	متری سازی اوریسون
Vitali convergence	همگرایی ویتاللی
Vitali covering	پوشش ویتاللی
Weierstrass approximation	تقریب وایر شتراس
Three lines lemma	لم سه خط
Tietze extension theorem	قضیه توسیع تیتسه
Tonelli's theorem	قضیه تونلی
Topological space	فضای توپولوژیک
Topological vector space	فضای برداری توپولوژیک
Topology	توپولوژی
cofinite	متم منتهای
generated by a family of sets	تولید شده با خانواده‌ای از مجموعه‌ها

indiscrete norm	ناگسسته نرمی	Weaker topology	توپولوژی ضعیف‌تر
of uniform convergence	همگرایی یکنواخت	Weierstrass approximation theorem	قضیه تقریب وایرستراس
of uniform convergence on compact sets	همگرایی یکنواخت روی مجموعه‌های فشرده	Well ordering principle	اصل خوشترتیبی
product	حاصلضربی	Well ordering	خوشترتیبی
quotient	خارج قسمتی	Z	
relative	نسبی	Zariski topology	توپولوژی زاریسکی
strong operator	عملگری قوی	Zorn's lemma	لم زورن
trivial	بدیهی		
weak operator	عملگری ضعیف		
weak	ضعیف		
weak*	W^*		
Zariski	زاریسکی		
Total ordering	ترتیب کلی		
Total variation	تغییر کل		
of a complex measure	یک اندازه مختلط		
of a function	یک تابع		
of a signed measure	یک اندازه علامت‌دار		
Totally bounded set	مجموعه کراندار کلی		
Transfinite induction	استقرای ترامتناهی		
Transpose	ترانپاده		
Triangle inequality	نامساوی مثلثی		
Trivial topology	توپولوژی بدیهی		
Tychonoff space	فضای تیخونف		
Tychonoff's theorem	قضیه تیخونف		
U			
Uniform boundedness principle	اصل کراندار یکنواخت		
Uniform integrability	انتگرال‌پذیری یکنواخت		
Uniform norm	نرم یکنواخت		
Unitary map	نگاشت یکانی		
Upper bound	کران بالا		
Urysohn metrization theorem	قضیه متری‌سازی اوریسون		
Urysohn's lemma	لم اوریسون		
V			
Vanish at infinity	تحلیل رفتن در بینهایت		
Vitali convergence theorem	قضیه همگرایی ویتالی		
Vitali covering theorem	قضیه پوشش ویتالی		
w			
Weak convergence	همگرایی ضعیف		
Weak L^p	L^p ضعیف		
Weak operator topology	توپولوژی عملگری ضعیف		
Weak topology	توپولوژی ضعیف		
Weak type	نوع ضعیف		
Weak* topology	W^* - توپولوژی		

فهرست راهنما

۱۳۷	پیوسته	۲۲۸	اتحاد پارسوال
۲۹	شمارشی	۱۱	آردینال
۱۱۹	تجزیه پذیر	۱۱	آردینال های شمارش پذیر
۲۹	دیراک	۱۰	استقرای ترامتاهی
۲۸	جمعی متناهی	۳۳	اشباع یک اندازه
۲۵	داخلی	۵۱۱	اصل خوشترتیبی
۲۵	لیگ	۲۱۱	اصل کرانداری یکنواخت
۴۳	لیگ - اشتیلیس	۵	اصل ماکسیمال هاسدورف
۳۳	خارجی	۱۳۸	اصل موضوع
۱۱۰	مثبت	۶	انتخاب
۱۲۷	منظم	۱۴۸	شمارش پذیری
۲۹	نیمه متناهی	۱۴۸	جدلی پذیری
۲۸	σ - متناهی	۷۱	افراز
۱۰۹	علامت دار	۱۷۴	یک بازه
۱۱۱	منفرد	۱۷۳	واحد
۳۳	اندازه اشباع شده	۱۰۴	برچسب دار
۴۰	اندازه برل	۱۰۴	افراز برچسب دار
۱۱۹	اندازه تجزیه پذیر	۲۵۵	LP ضعیف
۸۱	اندازه حاصلضربی	۲۳۰	الحاق
۲۵	اندازه داخلی	۱۲۰	امیدشرطی
۲۹	اندازه دیراک	۷۲	انتگرال
۲۸	اندازه σ - متناهی	۲۳۳	بوختر
۲۹	اندازه شمارشی	۱۰۴	دانیل
۱۱۴ - ۱۲۱	اندازه علامت دار	۷۲	ریمان
۱۱۲	اندازه علامت دار σ - متناهی	۹۸	کسری
۱۱۲	اندازه علامت دار متناهی	۱۰۵	کورزویل - هنسوک
۱۳۷	اندازه کامل	۷۲	لیگ
۸۹	اندازه گسسته	۱۳۸	لیگ - اشتیلیس
۲۹	اندازه لیگ	۶۷	یک تابع مختلط
۲۸	اندازه متناهی	۶۴	یک تابع نامنفی
۱۱۰	اندازه متناهی جمع	۶۶	یک تابع حقیقی
۱۲۰	اندازه مثبت	۶۲	یک تابع ساده
۱۲۷	اندازه مختلط	۲۳۳	انتگرال بوختر
۱۱۰	اندازه منظم	۱۱۸	انتگرال پذیری یکنواخت
۲۹	اندازه منفرد	۱۰۴	انتگرال دانیل
۱۱۱	اندازه نیمه متناهی	۷۲	انتگرال ریمان
۱۱	اندازه های دو به دو منفرد	۹۸	انتگرال کسری
۱۸۶	اولین آردینال شمارش ناپذیر	۱۰۵	انتگرال کورزویل - هنسوک
۱۹۹	آیدیه آل در یک جبر	۷۱	انتگرال لیگ
۱۹۹	ایزومتری	۱۳۸	انتگرال لیگ - اشتیلیس
۱۰۵	ایزومورفیسم	۲۸	اندازه
۲۳۰	برل	۴۰	برل
۵	خطی	۲۱	کامل
۲۲۹	ترتیبی	۱۲۰	مختلط
	یکانی		

۵۸	تابع ساده	۱۰۵	ایزومورفیسم برل
۱۳	تابع صعودی	۵	ایزومورفیسم ترتیبی
۱۳	تابع یکنوا	۱۰	اینفیمم
۲۰۲	تابع خطی	۱۳۱	با تغییر محدود
۳۷	تابع زیرخطی	۲۵۸	بازآرایی نزولی
۳۷	تابع خطی زیرجمعی	۱۲۷	با ظرافت چسبیدن
۷۳	تابع کانتور	۵۹	بخش مثبت یک تابع
۱۲۳	تابع کانتور - لبگ	۵۹	بخش منفی یک تابع
۱۲۳	تابع گاما	۸۳	بخش یک مجموعه یا یک تابع
۱۲۳	تابع ماکسیمال	۳	برد
۱۳۱	تابع ماکسیمال هاردی - لیتلود	۲۳۲	برد اساسی
۱۳۱	تابع محدب	۱۵	بستار
۱۷۱	تابع محمل فشرده	۲۲	پارادوکس باناخ - تارسکی
۵۷	تابع مشخصه	۱۳۷	پایه برای یک توپولوژی
۵۷	تابع مشخصه	۲۲۸	پایه متعامد
۱۲۳	تابع موضعا انتگرال پذیر	۱۳۷	پایه همسایه‌ای
۱۳	تابع نزولی	۱۷۳	پیرو
۱۳	تابع یکنوا	۳۶	پیش اندازه
۱۱۲	تجزیه جردن	۹	پیوستار
۱۳۳	یک تابع	۱۶	پیوستگی
۱۱۲	یک اندازه علامت دار		اندازه‌ها
۵۷	تجزیه قطبی	۱۴۰	لیپ شینز
۱۱۶	تجزیه لبگ	۱۱۳	مطلق
۱۱۱	تجزیه هان	۱۸۱	هولدر
۱۷۱	تحلیل رفتن در بینهایت	۱۶	یکنواخت
۲۱۴	تراکم تکین‌ها	۱۳۰	پیوستگی لب شینزی
۱۰۷	ترانهاده	۱۱۴	پیوستگی مطلق
۴	ترتیب جزئی	۱۳۵	یک تابع
۴	ترتیب خطی	۱۳۷	یک اندازه
۴	ترتیب کلی	۱۸۱	پیوستگی هولدر
۱۱۲	ترکیب	۱۷	پوشش
۱۲۰	تغییر کل	۱۷۷	پوشش متناهی موضعی
۱۳۱	یک اندازه مختلط	۲	تابع
۱۳۱	یک تابع	۵۴	تابع اندازه پذیر
۱۱۲	یک اندازه علامت دار	۵۴	تابع اندازه پذیر برل
	تغییر مثبت	۵۴	تابع اندازه پذیر لبگ
	یک تابع	۶۶	تابع انتگرال پذیر
۳	یک اندازه علامت دار		ضعیف
۲۲۷	تصویر	۱۱۰	توسیع یافته
۲۲۷	متعامد	۱۲۳	موضعی
۳	تصویر متعامد	۱۱۰	تابع انتگرال پذیر توسیع یافته
۱۷۷	تصویر معکوس	۷۲	تابع انتگرال پذیر ریمن
۱۳۳	تظریف یک پوشش	۱۳	تابع پیوسته چپ
۱۳۳	تغییر منفی	۱۳	تابع پیوسته راست
	یک تابع	۴۰	تابع توزیع

۱۹۶	جبر باناخ	۱۳۳	یک اندازه علامت‌دار
۱۹۰	جبر کاملاً منظم	۲	تفاضل متقارن
۱۴۹	جندسازی	۲	تفاضل مجموعه‌ها
۱۴۹	نقاط	۳۰	تقریباً همه جا
۱۴۹	نقاط و مجموعه‌های بسته	۱۴۵	توپولوژی
۲۹	جرم نقطه‌ای	۱۴۵	بدیهی
۲۸	جمع‌پذیری شمارش‌پذیر		تولید شده با خانواده‌ای از مجموعه‌ها ۷۱۴۶
۲	حاصلضرب دکارتی	۱۵۲	حاصلضربی
۱۲	حد اسفل	۱۶۰	خارج قسمتی
۱۲	حد اعلی	۱۶۶	زوی مجموعه‌های فشرده
۱۶۲	حد یک تور	۱۵۰	زارسکی
۲۷	حلقه مجموعه‌ها	۲۱۹	عملگری ضعیف
۱۷	خاصیت بولزانو - وایرستراس	۲۱۹	عملگری قوی
۱۶۶	خاصیت مقطع متناهی	۱۴۵	ناگسسته
۱۷	خاصیت هاینه - برل	۱۹۵	نرمی
۲۷	خانواده مقدماتی	۱۴۶	نسبی
۱۷۸	خانواده کراندار نقطه‌ای		هم‌پایان
۵	خوشتربینی	۱۷۱	همگرایی یکنواخت
۲	دامنه	۲۱۹	ضعیف
۱۵	درون	۲۱۹	W
۱۱	دستگاه اعداد حقیقی توسعه یافته	۱۴۵	توپولوژی بدیهی
۴	دنباله	۱۵۲	توپولوژی ترتیبی
۹۵	دیفومورفیسم	۱۵۲	توپولوژی حاصلضربی
۲	رابطه	۱۶۰	توپولوژی خارج قسمتی
۲	رابطه هم‌ارزی	۱۴۶	توپولوژی درشت
۱۰۵	رده بئر	۱۵۰	توپولوژی زارسکی
۲	رده هم‌ارزی	۱۵۲	توپولوژی ضعیف
۱۵	زیرمجموعه چگال		توپولوژی ضعیف‌تر
۱۵	از یک مجموعه	۲۱۹	توپولوژی عملگری ضعیف
۱۴۷	زیرپایه برای یک توپولوژی	۲۱۹	توپولوژی عملگری قوی
۳	زیردنباله	۱۹۲	توپولوژی فیلتر
۱۶۲	زیرتور	۱۴۶	توپولوژی قوی
۲۹	زیرجمعی	۱۴۵	توپولوژی گسسته
۱۹۵	زیرفضای یک فضای برداری	۱۴۵	توپولوژی ناگسسته
۱۰	سوپرمم	۱۹۶	توپولوژی نرمی
۲۳۸	سوپرمم اساسی	۱۴۶	توپولوژی نسبی
۲۳	σ - جبر	۱۴۵	توپولوژی متمم متناهی
۲۴	برل	۱۶۱	تور
۲۴	تولید شده با خانواده‌ای از توابع	۲۱۷	تور کشی
۲۴	تولید شده با خانواده‌ای از مجموعه‌ها	۱۶۴	تور هم‌پایان
۲۴	شمارش‌پذیر یا متمم شمارش‌پذیر	۳۰	ت. ه.
۲۶	حاصلضربی	۲۳	جبر
۲۴	σ - جبر برل	۱۹۶	باناخ
۲۵	σ - جبر حاصلضربی	۱۹۴	توابع
۲۷	σ - حلقه		مجموعه

۱۹۱-۱۸۹	فضای کاملاً منظم	۲۳	σ - میدان
۱۴	فضای متریک	۱۸۱	شبکه‌های از توابع
۱۶	فضای متریک کامل	۱۴۸-۹	شمارش پذیر
۱۴۹	فضای منظم	۱۴۸	موضعی
۱۷۰	فضای موضعی فشرده	۱۴۹	دنباله‌های
۲۱۵	فضای موضعی محذب	۱۶۳	شمول عکس
۱۴۹	فضای نرمال	۲۲۳	ضرب اسکالر
۱۴۹	فضای هاسنورف	۲۲۳	ضرب داخلی
۲۲۳	فضای هیلبرت	۵	عضو ماکسیمال
۱۹۲	فیلتر	۵	عضو مینیمال
۲۲۵	قانون متوازی‌الاضلاع	۱۵۲	عملگر بستاری
۲۳	بخش نیمه منتهی	۱۸۶	غلط
	قضیه	۲۲۷	فرایند گرام - اشمیت
۱۷۹	آرزو - آسکولی	۱۷۲	فشرده سازی
۲۲۰	آلاخلو	۱۷۲	تک نقطه‌ای
۱۸۱	استون - وایر شتراس	۱۸۹	استون - چخ
۷۹	ایگورف	۱۸۹	فشرده سازی استون - چخ
	پوشش ویتالی	۱۸۹	فشرده سازی الکساندروف
۱۱۲	تجزیه جردن	۱۷۲	فشرده سازی تک نقطه‌ای
۱۱۱	تجزیه هان	۱۰	فرضیه پیوستار
۱۸۵	تقریب وایر شتراس	۱۴۳-۲۸-۲۳-۱۴	فضا
۲۰۸	توسیع کرین	۲۳۵	فضای L^p
۱۵۷	توسیع تیتسه	۲۸	فضای اندازه
۱۷۸	تیخونف	۲۸	فضای اندازه پذیر
۲۵۹	درون یابی ریس - تورین	۲۰۶	فضای بازتابی
۲۶۲	درون یابی مارکینگوایز	۱۹۶	فضای باناخ
۱۱۵	رادون - نیکودیم	۲۱۵	فضای برداری توپولوژیک
۷	شرودر - برنشتاین	۲۱۷	فضای برداری توپولوژیک کامل
۸۵	فوبینی - تونلی	۱۹۵	فضای برداری نرم دار
۲۲۵	فیناغورس	۱۶۸	فضای به طور شمارش پذیر فشرده
۲۰۸	کانگوری بئر	۱۴۵	فضای توپولوژیک
۳۵	کاراتهودری	۱۷۷	فضای پیرا فشرده
۱۱۴	لیگ - رادون - نیکودیم	۲۲۳	فضای بیش هیلبرت
۸۱	لوسین	۱۷۸	فضای تیخونف
۱۳۴	ماکسیمال		فضای T_0, \dots, T_7
۱۹۰	متری سازی اوریسون	۱۵	فضای جنایی پذیر
۱۳۷	مشتق گیری لیگ	۱۹۷	فضای خارج قسمتی
۲۱۰	نگاشت باز	۱۹۵	فضای خطی نرم دار
۲۱۱	نمودار بسته	۲۰۲	فضای دوگان
۲۰۳	هان - باناخ	۱۷۳	فضای σ - فشرده
۶۹	همگرایی مغلوب	۱۴۸	فضای شمارش پذیر اول
۲۲۳	همگرایی ویتالی	۱۴۸	فضای شمارش پذیر دوم
۶۳	همگرایی یکنوا	۲۱۸	فضای فرشه
۱۷۹	قضیه آرزو - آسکولی	۱۶۵	فضای فشرده
۲۲۰	قضیه آلاخلو	۱۶۸	فضای فشرده دنباله‌ای

۳۰۱	فهرست راهنما
۵	قضیه استون - وایر شتراس
۲۵۹	قضیه ایگورف
۶۵	قضیه بنیادی حسابان
۸۳	قضیه تجزیه جردن
۱۵۷	قضیه تجزیه هان
۵	قضیه تقریب وایر شتراس
۲۵۹	قضیه توسیع تیتسه
۶۵	قضیه توسیع کرین
۸۳	قضیه تونلی
۱۴	قضیه تیخونف
۱۴	قضیه رادون - لیگ - نیکودیم
۱۹	قضیه درون یابی ریس - تورین
۲	قضیه درون یابی مارکینگوایز
۲۸	قضیه شرودر - برنشتاین
۵۴	قضیه فوبینی
۳۳-۱۲۲	قضیه فیناگورس
۳۳	قضیه کاراتودوری
۲۵	قضیه کاتگوری پتر
۳۳-۲۸	قضیه ماکسیمال
۱۵	قضیه متریک سازی اوریسون
۲۴	قضیه مشتق گیری لیگ
۱۵	قضیه نگاشت باز
۲۰۹	قضیه نمودار بسته
۲۰	قضیه هان - باناخ
۲۴۹	قضیه همگرایی مغلوب
۱۶۶	قضیه همگرایی وینالی
۱۶۲	قضیه همگرایی یکتا
۲۸	قطر
۸	قطعه اولیه
۸	قوانین دمرگان
۱۸	کاتگوری اول
۴۶	کاتگوری دوم
۴۷	کران بالا
۱۷	کران پایین
۱۷	کامل شده یک اندازه
۱۲۶	کنشی
۲۲۷	دنباله
۲۲۷	در اندازه
۱۱۰	کلاس یکتا
۲۴۷	گسسته
۱۵۲	گنجایش
۲۰۹	گنجایش جردن
۲۴	گوی
۲۴	لم
۲	اوریسون
۱۸۴-۱۸۱	
۷۹	
۱۳۷	
۱۱۲	
۱۱۰	
۱۵۷	
۲۰۸	
۸۶	
۱۷۸	
۱۱۵	
۲۵۹	
۲۶۲	
۷	
۸۶-۸۵	
۲۲۵	
۳۵	
۲۰۸	
۱۲۴	
۱۹۰	
۱۳۷	
۲۱۰	
۲۱۱	
۲۰۳	
۶۹	
۲۲۳	
۶۳	
۱۷	
۱۰	
۲	
۲۰۹	
۲۰۹	
۵	
۵	
۳۱	
۲۱۶-۱۶-۷۷	
۱۶	
۷۷	
۸۳	
۱۴۵ و ۱۳۷	
۹۱	
۹۲	
۱۵	
۱۵۷	
زورن	
سه خط	
فاتو	
کلاس یکتا	
لم اوریسون	
لم زورن	
لم سه خط	
لم فاتو	
لم کلاس یکتا	
متر	
متر حاصلضربی	
مترهای هم ارز	
متمم	
مجموعه اندازه پذیر	
لیگ	
موضعی	
نسبت به یک اندازه خارجی	
مجموعه اندازه پذیر لیگ	
مجموعه اندازه پذیر	
مجموعه باز	
مجموعه برل	
مجموعه بسته	
مجموعه پس مانده	
مجموعه پوچ	
موضعی	
مجموعه پیش فشرده	
مجموعه جهت دار	
مجموعه σ - متناهی	
مجموعه شمارا	
مجموعه شمارش پذیر	
مجموعه فشرده	
مجموعه کانتور	
مجموعه کانتور تممیم یافته	
مجموعه کراندار	
مجموعه کراندار کلی	
مجموعه لیگ	
مجموعه متعامد	
مجموعه متعامد یکه کامل	
مجموعه مثبت	
مجموعه موضعا پوچ	
مجموعه ناهمبند	
مجموعه نحیف	
مجموعه های F_0 و F_∞	
مجموعه های G_0 و G_∞	
مجموعه های مجزا	

۱۹۷	خارج قسمتی	۱۱۰	مجموعه‌های منفی
۱۵۵	یکنواخت L^p	۱۵۲	مجموعه همبند
۲۳۵	نرم L^p	۱۶۰	مجموعه همبند راهی
۱۹۷	نرم حاصلضربی	۱۴۶	مجموعه هیچ‌چاچکال
۱۹۸	نرم عملگری	۱۷۱	محمل
۱۹۶	نرم‌های هم‌ارز	۱۷۱	یک تابع
۱۵۵	نرم یکنواخت	۹۸۹۹	مختصات قطبی
۱۵۲	نشانه	۱۴۶	مرز
۱۲۶	نقطه انباشتی	۲۳۵	نمای مزدوج
۱۲۶	نقطه بستاری	۸۳	مستطیل
۲۰۲-۱۵۲-۲۰۸-۲۲۸	نگاشت	۸۳-۱۲۷-۱۲۲-۱۱۶	مشتق
۲۱۰	نگاشت باز	۱۱۷	رادون - نیکودیوم
۳	نگاشت پوشا	۱۱۶	مشتق رادون - نیکودیوم
۲۱۱	نگاشت خطی بسته	۱۹۶	مطلقاً همگرا
۱۹۷	نگاشت خطی کراندار	۳	معکوس
۱۹۹	نگاشت خطی معکوس‌پذیر	۱۰	مقدم
۳	نگاشت دوسویی	۱۰۴	مقیاس
۱۷۶	نگاشت سره	۱۶۲	مکرراً
۴	نگاشت مؤلفه‌ای	۱۸۷	مکعب
۲۲۹	نگاشت یگانی	۴	مؤلفه
۲	نگاشت یک به یک	۱۵۲	مؤلفه همبند
۵۸	نمایش استاندارد	۲۳	میدان مجموعه‌ها
۵۸	یک تابع ساده		نامساوی
۲۱۰	نمودار نگاشت خطی	۲۲۷	بسل
۲۶۲	نوع ضعیف	۲۵۰	چبیشف
۲۶۲	نوع قوی	۲۲۳	شوارتز
۱۶۲	نهایتاً	۱۹۵	مثلثی
۴۰	نیم‌بازه	۲۵۱	مینکوفسکی
۱۹۵	نیم‌نرم	۲۵۲	هاردی
۱۸۶	هسته یک مجموعه بسته	۲۳۶	هولدر
۱۷۸	همبستگی	۲۵۲	هیلبرت
۱۲۶	همسایگی	۱۴۱	ینسن
	همگرایی	۲۲۷	نامساوی بسل
۱۹۶	مطلق	۲۵۰	نامساوی چبیشف
۷۹	تقریباً یکنواخت	۲۲۳	نامساوی شوارتز
۶۸	در L^1	۱۹۵	نامساوی مثلثی
۷۷	در اندازه	۲۵۱	نامساوی مینکوفسکی
۱۹۲	یک فیلتر	۲۵۱	برای انتگرال‌ها
۱۶۲	یک تور	۲۵۲	نامساوی هاردی
۱۵	یک دنباله	۲۳۶	نامساوی هولدر
۱۹۵	یک سری	۲۵۲	نامساوی هیلبرت
۲۱۸	همگرایی ضعیف	۱۴۱	نامساوی ینسن
۲۳۱	همه سویی میانگین	۱۵۵	نرم
۱۵۲	همیومورفیسم	۱۹۸	عملگری
۲۹	یکنوایی اندازه‌ها	۱۹۷	حاصلضربی

Copyright © 1999 by John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.

Published simultaneously in Canada.

No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, scanning or otherwise, except as permitted under Sections 107 or 108 of the 1976 United States Copyright Act, without either the prior written permission of the Publisher, or authorization through payment of the appropriate per-copy fee to the Copyright Clearance Center, 222 Rosewood Drive, Danvers, MA 01923; (978) 750-8400, fax (978) 750-4744. Requests to the Publisher for permission should be addressed to the Permissions Department, John Wiley & Sons, Inc., 605 Third Avenue, New York, NY 10158-0012, (212) 850-6011, fax (212) 850-6008. E-Mail: PERMREQ@WILEY.COM.

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data:

Folland, Gerald B.

Real analysis : modern techniques and their applications / Gerald B.

Folland. --2nd ed.

p. cm. --(Pure and applied mathematics)

"A Wiley-Interscience publication."

Includes bibliographical references and index.

ISBN 0-471-31716-0 (cloth alk. paper)

t. Mathematical analysis. 2. Functions of real variables.

I. Title. II. Series: Pure and applied mathematics (John Wiley & Sons : Unnumbered)

QA300.F67 1999

515--dc21 98-37260

Printed in the United States of America

10 9 8 7 6 5 4 3 2

Real Analysis
*Modern Techniques and
Their Applications*

Second Edition

Gerald B. Folland



A Wiley-Interscience Publication

JOHN WILEY & SONS, INC

New York / Chichester / Weinheim / Brisbane / Singapore / Toronto

